# La continuité au-delà des nombres réels

Vlad-Ștefan Constantinescu

## Introduction

Au lycée, la continuité se définit pour les fonctions d'une variable réelle : si $x_k \to x$, alors $f(x_k) \to f(x)$. Je n'ai pas vu beaucoup de gens parler de continuité en dehors de celle étudiée en classe, alors qu'elle peut être très utile dans les problèmes d'olympiade.

Dans beaucoup de problèmes d'olympiade, la variable n'est pas un nombre, mais un objet plus compliqué : une matrice, une fonction, une configuration géométrique. La continuité que nous définissons dans la section 2, relativement à la distance du « plus grand écart », est nouvelle par rapport au programme de la classe de XI$^{\text{e}}$ (en Roumanie). Le but de ce texte est pratique : montrer quand on peut formaliser la notion de passage à la limite aussi pour des objets qui ne sont pas des nombres réels.

Nous partons de trois problèmes de concours dont les solutions ont la même structure : la propriété demandée est d'abord démontrée sur une classe d'objets commode, puis étendue à tous les objets par approximation. Pour le premier, c'est exactement la démarche de la solution officielle ; les deux autres ont aussi des solutions sans aucune limite, que nous signalons dès le début, mais nous les gardons comme exemples d'entraînement. À partir d'eux, nous écrivons le cadre général (section 2), nous l'appliquons à d'autres problèmes de concours (section 3), nous montrons où il ne fonctionne pas (section 4) et nous terminons par des exercices. La théorie de lycée que nous utilisons (limites, continuité, ensembles denses, propriété de Darboux, matrices et valeurs propres, polynômes symétriques, intégrales) se trouve dans mes volumes [1, 2, 3, 4] et dans leurs traductions [5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12].

## 1. Trois problèmes

### 1.1 Problème 1. Olympiade nationale roumaine (ONM) 2022, classe de XI$^{\text{e}}$, problème 4

**Énoncé.** Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $A^2 + B^2 = 2AB$. Montrer que

$$\det(A - xI_n) = \det(B - xI_n),$$

pour tout $x \in \mathbb{C}$.

*Source : [13]. La solution ci-dessous suit la solution 1 du barème ; à l'étape 3, nous donnons aussi la forme avec limite.*

**Solution.** *Étape 1 : le cas $A$, $B$ inversibles.* En multipliant la relation à gauche par $A^{-1}$ et à droite par $B^{-1}$, on obtient $AB^{-1} + A^{-1}B = 2I_n$. Avec $X = A^{-1}B$, on a $B = AX$, donc $AB^{-1} = AX^{-1}A^{-1}$, et la relation devient $AX^{-1}A^{-1} = 2I_n - X$. Les matrices $2I_n - X$ et $X^{-1}$ sont donc semblables et ont les mêmes valeurs propres, avec les mêmes multiplicités. Soit

$Y = I_n - X$ : les matrices $I_n + Y$ et $(I_n - Y)^{-1}$ ont les mêmes valeurs propres. Les valeurs propres de $(I_n - Y)^{-1}$ sont les nombres $\frac{1}{1-\beta}$, où $\beta$ est une valeur propre de $Y$. Si $\alpha$ est une valeur propre de $Y$, alors $1 + \alpha$ est valeur propre de $I_n + Y$, donc $1 + \alpha = \frac{1}{1-\beta}$ pour une valeur propre $\beta$ de $Y$ ; en particulier $1 + \alpha \neq 0$ et $\beta = \frac{\alpha}{1+\alpha}$. En appliquant cette remarque de proche en proche, par récurrence, on obtient que tous les nombres $\frac{\alpha}{1+k\alpha}$, $k \in \mathbb{N}$, sont valeurs propres de $Y$. Si $\alpha \neq 0$, ils sont deux à deux distincts, et $Y$ aurait une infinité de valeurs propres, ce qui est absurde. Donc toutes les valeurs propres de $Y$ valent 0, toutes les valeurs propres de $X = I_n - Y$ valent 1, $\det X = 1$ et $\det B = \det A \cdot \det X = \det A$.

*Étape 2 : les notions utilisées.* Nous passons maintenant des couples de matrices inversibles à tous les couples, par une limite. Nous définissons d'abord, à partir de zéro, chaque notion dont nous avons besoin.

**Définition 1.** Une *suite de couples de matrices* est une règle qui associe à chaque entier naturel $k \geq 1$ un couple $(P_k, Q_k)$ de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Un couple est décrit par $2n^2$ nombres : les coefficients de $P_k$ et ceux de $Q_k$. La suite *converge* vers le couple $(P, Q)$, et l'on écrit $(P_k, Q_k) \to (P, Q)$, si chacun de ces $2n^2$ nombres converge vers le nombre situé à la même position dans $P$, respectivement dans $Q$.

**Définition 2.** Soit $\mathcal{H}$ une classe de couples de matrices et $\mathcal{H}^*$ une partie de celle-ci. On dit que $\mathcal{H}^*$ est *dense* dans $\mathcal{H}$ si tout couple de $\mathcal{H}$ est la limite d'une suite de couples de $\mathcal{H}^*$.

**Définition 3.** Une *grandeur* sur $\mathcal{H}$ est une règle $\Phi$ qui associe à chaque couple de $\mathcal{H}$ un nombre complexe. Elle est *continue* sur $\mathcal{H}$ si, chaque fois que $(P_k, Q_k) \to (P, Q)$, avec tous les couples dans $\mathcal{H}$, on a $\Phi(P_k, Q_k) \to \Phi(P, Q)$.

Soit

$$\mathcal{H} = \{(P, Q) : \ P^2 + Q^2 = 2PQ\}$$

la classe des couples qui vérifient l'hypothèse et $\mathcal{H}^* \subseteq \mathcal{H}$ la classe de ceux pour lesquels $P$ et $Q$ sont inversibles. L'étape 1 affirme que $\det P = \det Q$ pour tout $(P, Q) \in \mathcal{H}^*$.

L'hypothèse est conservée quand on translate les deux matrices par le même multiple de $I_n$ : pour $(P, Q) \in \mathcal{H}$ et $c \in \mathbb{C}$, en développant,

$$(P - cI_n)^2 + (Q - cI_n)^2 = P^2 + Q^2 - 2c(P + Q) + 2c^2 I_n = 2(P - cI_n)(Q - cI_n),$$

donc $(P - cI_n, Q - cI_n) \in \mathcal{H}$.

**Lemme 1.** *La classe $\mathcal{H}^*$ est dense dans $\mathcal{H}$, c'est-à-dire que tout couple de $\mathcal{H}$ est la limite d'une suite de couples de $\mathcal{H}^*$.*

*Démonstration.* Soit $(P, Q) \in \mathcal{H}$. Nous construisons une suite de couples de $\mathcal{H}^*$ qui converge vers $(P, Q)$, en trois temps.

*(i) Le choix des nombres $c_k$.* Soit $V$ l'ensemble des valeurs propres de $P$ et de $Q$. Les valeurs propres de $P$ sont les racines du polynôme $\det(P - cI_n)$, de degré $n$ en $c$, donc il y en a au plus $n$ ; de même pour $Q$. Ainsi $V$ a au plus $2n$ éléments. Chaque élément de $V$ est égal à $\frac{1}{k}$ pour au plus un $k$, donc seul un nombre fini d'indices $k$ vérifient $\frac{1}{k} \in V$. En les écartant, on obtient une suite $c_k \to 0$ avec $c_k \notin V$ pour tout $k$.

*(ii) Les couples $(P - c_k I_n, Q - c_k I_n)$ sont dans $\mathcal{H}^*$.* Comme $c_k$ n'est pas valeur propre de $P$, on a $\det(P - c_k I_n) \neq 0$, donc $P - c_k I_n$ est inversible ; de même pour $Q - c_k I_n$. D'après le calcul ci-dessus, avec $c = c_k$, le couple vérifie la relation qui définit $\mathcal{H}$. Il est donc dans $\mathcal{H}^*$.

*(iii) La convergence.* En dehors de la diagonale, la matrice $P - c_k I_n$ a les mêmes coefficients que $P$ : ils forment des suites constantes, qui convergent vers les coefficients de $P$. Sur la diagonale, elle a $p_{ii} - c_k$, et $p_{ii} - c_k \to p_{ii}$ car $c_k \to 0$. De même pour $Q - c_k I_n$. Les $2n^2$ suites de nombres convergent toutes, donc $(P - c_k I_n, Q - c_k I_n) \to (P, Q)$ (définition 1). □

*Étape 3 : l'extension.* Soit $\Phi(P,Q) = \det P - \det Q$.

*(i) $\Phi$ est continue sur $\mathcal{H}$.* Soit $(P_k, Q_k) \to (P, Q)$. D'après la définition du déterminant,

$$\det P_k = \sum_\sigma \varepsilon(\sigma)\, p^{(k)}_{1\sigma(1)}\, p^{(k)}_{2\sigma(2)} \cdots p^{(k)}_{n\sigma(n)},$$

où la somme porte sur les $n!$ permutations $\sigma$ de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$, et $\varepsilon(\sigma) = \pm 1$ est la signature de la permutation. Chaque facteur $p^{(k)}_{i\sigma(i)}$ est une suite de nombres qui converge vers $p_{i\sigma(i)}$ (définition 1). Le produit de $n$ suites convergentes converge vers le produit des limites, et une somme finie de suites convergentes converge vers la somme des limites. Donc $\det P_k \to \det P$ ; de même $\det Q_k \to \det Q$, et leur différence converge vers la différence des limites : $\Phi(P_k, Q_k) \to \Phi(P, Q)$.

*(ii) $\Phi$ est nulle sur $\mathcal{H}^*$.* C'est exactement l'étape 1 : pour $(P, Q) \in \mathcal{H}^*$, $\det P = \det Q$.

*(iii) $\Phi$ est nulle sur tout $\mathcal{H}$.* Soit $(P, Q) \in \mathcal{H}$ et $(P_k, Q_k)$ la suite du lemme 1. D'après (ii), $\Phi(P_k, Q_k) = 0$ pour tout $k$, donc la suite $\Phi(P_k, Q_k)$ est constante égale à 0 et a pour limite 0. D'après (i), cette même limite est $\Phi(P, Q)$. Comme une suite de nombres a une seule limite, $\Phi(P, Q) = 0$. (Dans le langage de la section 2, c'est le théorème 1 a) appliqué à la classe $\mathcal{H}$ et à la classe dense $\mathcal{H}^*$.)

*(iv) La conclusion.* Soit $x \in \mathbb{C}$. Le couple $(A, B)$ est dans $\mathcal{H}$, donc, d'après le calcul de l'étape 2 avec $c = x$, le couple $(A - xI_n, B - xI_n)$ est lui aussi dans $\mathcal{H}$. D'après (iii), $\Phi(A - xI_n, B - xI_n) = 0$, c'est-à-dire $\det(A - xI_n) = \det(B - xI_n)$. □

> *Remarque.* Le barème conclut de façon algébrique : $\det(A - xI_n) - \det(B - xI_n)$ est un polynôme en $x$ qui s'annule en tous les points $x$ qui ne sont pas valeurs propres, donc c'est le polynôme nul. Le barème contient aussi une deuxième solution, purement algébrique, par les rangs. Le point essentiel de la solution ci-dessus est que l'approximation se fait *à l'intérieur de la classe de l'hypothèse* : les couples approximants vérifient eux aussi $P^2 + Q^2 = 2PQ$, donc nous savons quelque chose sur eux. Il ne suffirait pas que les couples de matrices inversibles soient denses dans l'ensemble de tous les couples. Dans la section 4, nous verrons un problème où c'est justement cette condition qui manque.

## 1.2 Problème 2. Olympiade roumaine, étape départementale (OJM) 2026, classe de XI$^{\text{e}}$, problème 3

---

**Énoncé.** Soit $n \geq 2$. Déterminer les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ayant la propriété suivante : si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $AB = M$, alors $BA = M$.

**Réponse.** $M = \lambda I_n$ avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

*Source : [14, 15]. Précisons dès le début que le barème officiel n'utilise aucune limite : après l'étape 1 ci-dessous, il utilise directement les matrices inversibles $I_n + E_{1j}$. Nous gardons le problème comme exemple d'entraînement.*

**Note personnelle.** J'ai participé à l'OJM 2026, et la solution ci-dessous est la première que j'ai trouvée pendant l'épreuve. Ce n'est pas celle que j'ai rédigée : j'ai estimé qu'un argument avec des limites risquait de ne pas être accepté comme complet.

**Solution.** On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices inversibles. La solution passe à la limite dans une suite de matrices. Les notions sont celles du problème 1, écrites maintenant pour une seule matrice ; nous les redonnons, à partir de zéro.

> **Définition 4.** Une *suite de matrices* est une règle qui associe à chaque entier naturel $k \geq 1$ une matrice $X_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $x^{(k)}_{ij}$ les coefficients de $X_k$. Pour chaque position $(i, j)$

fixée, on obtient ainsi une suite ordinaire de nombres complexes, $\left(x_{ij}^{(k)}\right)_{k\geq 1}$.

**Définition 5.** La suite de matrices $(X_k)$ *converge* vers la matrice $X = (x_{ij})$, et l'on écrit $X_k \to X$, si pour chaque position $(i,j)$ on a $x_{ij}^{(k)} \to x_{ij}$, c'est-à-dire $\left|x_{ij}^{(k)} - x_{ij}\right| \to 0$. De façon équivalente, comme les positions sont en nombre fini, le plus grand écart $\max_{i,j}\left|x_{ij}^{(k)} - x_{ij}\right|$ tend vers 0.

**Lemme 2.** *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ fixée. La grandeur $X \mapsto MX - XM$ est continue, c'est-à-dire : si $X_k \to X$, alors $MX_k - X_kM \to MX - XM$. En particulier, si $MX_k - X_kM = O_n$ pour tout $k$, alors $MX - XM = O_n$.*

*Démonstration.* Le coefficient en position $(i,j)$ de la matrice $MX_k - X_kM$ est

$$\sum_{l=1}^{n} m_{il}\, x_{lj}^{(k)} - \sum_{l=1}^{n} x_{il}^{(k)}\, m_{lj},$$

une combinaison linéaire, à coefficients fixes, d'un nombre fini de coefficients de $X_k$. D'après les règles de calcul sur les limites de suites de nombres, il tend vers le coefficient correspondant de $MX - XM$. Si toutes les matrices $MX_k - X_kM$ sont nulles, chacune de ces suites de nombres est constante égale à 0, donc sa limite est 0. □

*Étape 1 : $M$ commute avec toute matrice inversible.* Pour $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, on prend $A = MC$, $B = C^{-1}$ : $AB = M$, donc $BA = C^{-1}MC = M$, c'est-à-dire $MC = CM$.

*Étape 2 : l'approximation d'une matrice quelconque.*

**Lemme 3.** *L'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, c'est-à-dire que pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ il existe une suite de matrices inversibles $X_k$ avec $X_k \to X$.*

*Démonstration.* La fonction $p(t) = \det(X + tI_n)$ est un polynôme en $t$ de degré $n$, de coefficient dominant 1, donc elle a au plus $n$ racines. Chaque racine est égale à $\frac{1}{k}$ pour au plus un $k$ ; en écartant ces indices, en nombre fini, on obtient une suite $t_k \to 0$ avec $p(t_k) \neq 0$ pour tout $k$. Les matrices $X_k = X + t_kI_n$ ont pour déterminant $p(t_k) \neq 0$, donc elles sont inversibles. En dehors de la diagonale, les coefficients de $X_k$ sont ceux de $X$ (suites constantes) ; sur la diagonale, ils valent $x_{ii} + t_k \to x_{ii}$. Donc $X_k \to X$ (définition 5). □

Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ quelconque et $X_k$ la suite de matrices inversibles du lemme 3, avec $X_k \to X$. D'après l'étape 1, appliquée à la matrice inversible $X_k$, on a $MX_k - X_kM = O_n$ pour tout $k$. D'après le lemme 2, $MX_k - X_kM \to MX - XM$ ; une suite constante égale à $O_n$ a pour limite $O_n$, donc $MX - XM = O_n$, c'est-à-dire $MX = XM$. Comme $X$ était quelconque, $M$ commute avec toute matrice.

*Étape 3 : $M$ est scalaire.* Soit $E_{ij}$ la matrice qui a 1 en position $(i,j)$ et 0 ailleurs. La colonne $j$ de $ME_{ij}$ est la colonne $i$ de $M$, les autres colonnes étant nulles ; la colonne $j$ de $E_{ij}M$ a le coefficient $m_{jj}$ en position $i$ et 0 ailleurs. De $ME_{ij} = E_{ij}M$, avec $j \neq i$, on déduit $m_{ki} = 0$ pour $k \neq i$ et $m_{ii} = m_{jj}$. Donc $M = \lambda I_n$.

*Étape 4 : vérification.* Pour $\lambda = 0$, la propriété n'est pas vérifiée : $A = E_{12}$, $B = E_{11}$ donnent $AB = O_n$ et $BA = E_{12} \neq O_n$ (c'est ici qu'on utilise $n \geq 2$). Pour $\lambda \neq 0$, de $AB = \lambda I_n$ on déduit $\det A \det B = \lambda^n \neq 0$, donc $B = \lambda A^{-1}$ et $BA = \lambda I_n$. □

*Remarque.* Ici $MX - XM$ ne change pas quand on remplace $X$ par $X + tI_n$, donc on peut éviter la limite. La forme avec limite montre cependant le mécanisme général, qui fonctionne aussi quand une telle simplification n'existe pas.

## 1.3 Problème 3. OJM 2004, classe de XII$^{e}$, problème 2

**Énoncé.** Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\int_0^1 f(x)g(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx \cdot \int_0^1 g(x)\,dx$$

pour toute fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et non dérivable. Montrer que $f$ est constante.

*Source : [16]. Précisons dès le début que la limite peut être complètement évitée (voir la remarque qui suit la solution), et que la solution officielle utilise une fonction test localisée, sans aucune limite.*

**Note personnelle.** J'ai rencontré ce problème en travaillant sur l'échelle de difficulté ROHS (une échelle de 0 à 50 que je construis pour les problèmes de l'OJM et de l'ONM, séparément pour chaque classe). J'estime ma solution ci-dessous entre 20 et 25 sur l'échelle ROHS ; la solution officielle est plus facile.

**Solution.** Ici aussi, la solution passe à la limite, cette fois dans une suite de fonctions. Nous définissons d'abord les notions (voir aussi [2]).

**Définition 6.** Une *suite de fonctions continues* est une règle qui associe à chaque entier naturel $k \geq 1$ une fonction continue $g_k : [0,1] \to \mathbb{R}$. Pour chaque $x \in [0,1]$ fixé, on obtient une suite ordinaire de nombres, $\big(g_k(x)\big)_{k\geq 1}$.

**Définition 7.** Pour $g_1, g_2 : [0,1] \to \mathbb{R}$ continues, on appelle *distance* entre elles le plus grand écart entre leurs valeurs,

$$d(g_1,g_2) = \max_{x\in[0,1]} |g_1(x) - g_2(x)|$$

(le maximum existe, car c'est le maximum d'une fonction continue sur un intervalle fermé). La suite $(g_k)$ *converge uniformément* vers $g$, et l'on écrit $g_k \to g$, si $d(g_k, g) \to 0$.

Il ne suffit pas que $g_k(x) \to g(x)$ pour chaque $x$ pris séparément ; nous demandons que l'écart devienne petit *simultanément* en tous les points. On verra dans la section 2.2 pourquoi cette exigence est nécessaire.

Soient $c = \int_0^1 f$, $\varphi = f - c$ et $L(g) = \int_0^1 \varphi g$, pour $g$ continue. Pour $g$ continue et non dérivable, $L(g) = \int_0^1 fg - c\int_0^1 g = 0$.

*Étape 1 : $L$ se comporte bien à la limite.*

**Lemme 4.** *La grandeur $L$ est continue pour la convergence uniforme, c'est-à-dire : si $g_k \to g$ uniformément, alors $L(g_k) \to L(g)$.*

*Démonstration.* Pour $g_1, g_2$ continues, $|\varphi(x)\big(g_1(x) - g_2(x)\big)| \leq |\varphi(x)|\, d(g_1,g_2)$ pour tout $x$, donc, en intégrant,

$$|L(g_1) - L(g_2)| \leq \int_0^1 |\varphi| \cdot d(g_1,g_2).$$

Avec $g_1 = g_k$ et $g_2 = g$, le membre de droite tend vers 0. □

*Étape 2 : l'approximation d'une fonction continue quelconque.*

**Lemme 5.** *Les fonctions continues non dérivables forment une classe dense dans la classe des fonctions continues sur $[0,1]$, c'est-à-dire que toute fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue est la limite uniforme d'une suite de fonctions continues non dérivables.*

*Démonstration.* Soit $\tau(x) = |x - \frac{1}{2}|$, continue, non dérivable en $\frac{1}{2}$, avec $\max|\tau| = \frac{1}{2}$. La fonction $g + \varepsilon\tau$ est non dérivable en $\frac{1}{2}$ pour toutes les valeurs réelles de $\varepsilon$, sauf au plus une : si $g + \varepsilon_1\tau$ et $g + \varepsilon_2\tau$, avec $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$, étaient dérivables en $\frac{1}{2}$, alors $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\tau$ serait elle aussi dérivable en $\frac{1}{2}$, ce qui est faux. On choisit $\varepsilon_k \to 0$ en évitant cette valeur ; les fonctions $g_k = g + \varepsilon_k\tau$ sont continues, non dérivables, et $d(g_k, g) = \frac{|\varepsilon_k|}{2} \to 0$. □

*Étape 3 : la conclusion.* Soit $g$ continue quelconque et $g_k$ la suite de fonctions continues non dérivables du lemme 5, avec $g_k \to g$ uniformément. Chaque $g_k$ est non dérivable, donc $L(g_k) = 0$ : la suite $L(g_k)$ est constante égale à 0. D'après le lemme 4, $L(g_k) \to L(g)$, donc $L(g) = 0$. Pour $g = \varphi$, on obtient $\int_0^1 \varphi^2 = 0$. La fonction $\varphi^2$ est continue et positive ; si $\varphi(x_0) \neq 0$, alors $\varphi^2 > \frac{1}{2}\varphi^2(x_0)$ sur un intervalle autour de $x_0$ et l'intégrale serait strictement positive. Donc $\varphi \equiv 0$ et $f \equiv c$. □

> *Remarque* ($L$ est nulle en deux lignes). Si $g$ est continue et dérivable en tout point de $[0, 1]$, alors $g + \tau$ est non dérivable en $\frac{1}{2}$, donc $L(g) = L(g + \tau) - L(\tau) = 0$. Toute fonction continue est soit non dérivable quelque part (et alors l'hypothèse donne directement $L(g) = 0$), soit dérivable partout (et alors nous venons de voir que $L(g) = 0$). Ainsi $L$ est identiquement nulle sans aucune limite, et les lemmes 4 et 5 ne sont pas nécessaires. Nous avons cependant gardé la solution par approximation, car elle montre le mécanisme sous sa forme la plus nette.

### 1.4 De trois problèmes à une généralisation

Ces trois problèmes nous donnent l'idée de généraliser de la façon suivante. Les trois solutions ont les trois mêmes étapes.

1. La propriété est démontrée sur une classe particulière d'objets : les couples de matrices inversibles de $\mathcal{H}$ ; les matrices inversibles ; les fonctions non dérivables.

2. On montre que tout objet peut être approché aussi près qu'on veut par des objets de cette classe (lemmes 1, 3 et 5).

3. La grandeur qui exprime la propriété ($\det P - \det Q$, $MX - XM$, respectivement $L(g)$) se comporte bien à la limite (étape 3 du problème 1, lemmes 2 et 4), donc la propriété passe des objets approximants à l'objet approché.

De plus, les définitions de la convergence ont la même forme. Un couple de matrices est décrit par ses $2n^2$ coefficients, une matrice par les nombres $x_{ij}$, une fonction par les nombres $g(x)$, et dans tous les cas une suite converge quand *le plus grand écart entre les nombres correspondants* tend vers 0 (définitions 1, 5 et 7). La seule différence est qu'un couple de matrices ou une matrice sont décrits par un nombre fini de nombres, et une fonction par une infinité.

Nous généralisons donc ainsi : tout objet (matrice, fonction, triangle, droite) est décrit par une liste de nombres, ses paramètres ; la distance entre deux objets est le plus grand écart entre les paramètres correspondants ; une grandeur associée aux objets est continue si elle change peu quand les paramètres changent peu. Dans la section suivante, nous développons ce cadre et montrons que les trois étapes ci-dessus deviennent un seul théorème.

## 2. La théorie

## 2.1 Objets décrits par des paramètres

**Définition 8.** Soit $I$ un ensemble non vide (l'ensemble des indices). Un *objet à paramètres indexés par* $I$ est une fonction $X : I \to \mathbb{C}$ ; les nombres $X(i)$, $i \in I$, sont appelés les *paramètres* de $X$. Dans beaucoup d'applications, les paramètres sont réels.

Autrement dit, un objet est donné par la liste de ses paramètres, un pour chaque indice $i \in I$, et nous l'identifions à cette liste. La liste peut être finie ou infinie (pour les fonctions, elle a un terme pour chaque nombre de $[0,1]$).

**Exemple.** a) *Matrice.* Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est l'objet avec $I = \{1,\dots,n\}^2$. La fonction est

$$A : \{1,\dots,n\}^2 \to \mathbb{C}, \qquad A(i,j) = a_{ij},$$

donc la matrice a $n^2$ paramètres, ses coefficients. Avec la distance de la section 2.2, deux matrices sont proches quand tous leurs coefficients correspondants sont proches. Par exemple, pour

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2{,}1 \\ 3 & 3{,}95 \end{pmatrix},$$

les fonctions sont $A(1,1) = 1$, $A(1,2) = 2$, $A(2,1) = 3$, $A(2,2) = 4$ et $B(1,1) = 1$, $B(1,2) = 2{,}1$, $B(2,1) = 3$, $B(2,2) = 3{,}95$. Les écarts sont 0, 0,1, 0 et 0,05, donc la distance entre $A$ et $B$ est 0,1. De même, un *couple* de matrices $(P,Q)$ du problème 1 est l'objet avec $I = \{1,2\} \times \{1,\dots,n\}^2$ et $2n^2$ paramètres ; la fonction est $(1,i,j) \mapsto p_{ij}$, $(2,i,j) \mapsto q_{ij}$.

b) *Triangle.* Un triangle $ABC$ du plan est l'objet avec $I = \{1,\dots,6\}$, les paramètres étant les coordonnées des sommets. La fonction est $X : \{1,\dots,6\} \to \mathbb{R}$,

$$X(1) = x_A, \quad X(2) = y_A, \quad X(3) = x_B, \quad X(4) = y_B, \quad X(5) = x_C, \quad X(6) = y_C.$$

Toutes les fonctions de ce type ne sont pas des triangles : nous demandons que $A, B, C$ ne soient pas alignés, donc la classe des triangles est une partie de l'ensemble des listes de six nombres. Deux triangles sont à distance au plus $\delta$ quand chaque sommet de l'un s'obtient à partir du sommet correspondant de l'autre en déplaçant chaque coordonnée d'au plus $\delta$. Par exemple, le triangle de sommets $(0,0)$, $(4,0)$, $(0,3)$ est la fonction de valeurs $0,0,4,0,0,3$, et celui de sommets $(0;0{,}01)$, $(4,0)$, $(0;2{,}98)$ est la fonction de valeurs 0; 0,01; 4; 0; 0; 2,98. Les écarts sont 0, 0,01, 0, 0, 0, 0,02, donc les deux triangles sont à distance 0,02.

c) *Polynôme.* Un polynôme $a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$ de degré au plus $n$ est l'objet avec $I = \{0,\dots,n\}$, les paramètres étant les coefficients. La fonction est

$$\{0,\dots,n\} \to \mathbb{C}, \qquad k \mapsto a_k.$$

Par exemple, pour $n = 2$, le polynôme $X^2 + 1$ est la fonction $0 \mapsto 1$, $1 \mapsto 0$, $2 \mapsto 1$, et $X^2 + 0{,}01X + 1$ est la fonction $0 \mapsto 1$, $1 \mapsto 0{,}01$, $2 \mapsto 1$ ; ils ne diffèrent qu'à l'indice 1, donc ils sont à distance 0,01. Si deux polynômes de degré au plus $n$ sont à distance $\delta$, alors pour $|x| \leq 1$ leurs valeurs diffèrent d'au plus $(n+1)\delta$, car chacun des $n+1$ termes diffère d'au plus $\delta$.

d) *Fonction.* Une fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ est l'objet avec $I = [0,1]$. Ici, la fonction de la définition 8 est $g$ elle-même : le paramètre d'indice $x$ est la valeur $g(x)$, un pour chaque

nombre $x$ de $[0,1]$, donc une infinité de paramètres. La distance entre $g$ et $h$ est la plus grande valeur de $|g(x)-h(x)|$ ; elle est au plus $\delta$ exactement quand le graphe de $h$ reste dans la bande de largeur $2\delta$ autour du graphe de $g$. Par exemple, $g(x)=x$ et $h(x)=x+0{,}01\sin(10x)$ sont à distance au plus 0,01. C'est l'objet du problème 3.

e) *Droite.* Toute droite a une équation $ax+by+c=0$, avec $(a,b)\neq(0,0)$. En la divisant par $r=\sqrt{a^2+b^2}$ et en choisissant l'angle $\theta$ tel que $\cos\theta=\frac{a}{r}$, $\sin\theta=\frac{b}{r}$, elle devient

$$x\cos\theta+y\sin\theta=p,\qquad p=-\frac{c}{r},$$

où $(\cos\theta,\sin\theta)$ est un vecteur de longueur 1 perpendiculaire à la droite, et $|p|$ est la distance de l'origine à la droite. Cette forme couvre aussi les droites verticales : $x=1$ s'obtient pour $\theta=0$, $p=1$. La droite est donc l'objet à deux paramètres $(\theta,p)$ ; la fonction est $X:\{1,2\}\to\mathbb{R}$, $X(1)=\theta$, $X(2)=p$. Une même droite a plusieurs couples : $(\theta,p)$, $(\theta+2\pi,p)$ et $(\theta+\pi,-p)$ donnent le même ensemble de points. Nous travaillons avec le couple, c'est-à-dire avec l'équation, et non avec l'ensemble de points.

f) *Configuration.* Dans l'exercice 4, une configuration géométrique (un trapèze et deux points sur ses côtés) sera l'objet à six paramètres $a,b,c,\eta,s,t$ ; la fonction est $X:\{1,\dots,6\}\to\mathbb{R}$, avec $X(1)=a$, $X(2)=b$, $X(3)=c$, $X(4)=\eta$, $X(5)=s$, $X(6)=t$. Dans tous les cas, « objets proches » signifie « tous les paramètres sont proches ».

## 2.2 Distance et limite

**Définition 9.** La distance entre deux objets $X,Y$ à paramètres indexés par le même ensemble $I$ est

$$d(X,Y)=\sup_{i\in I}|X(i)-Y(i)|\in[0,+\infty],$$

c'est-à-dire le plus grand écart entre les paramètres correspondants. Une suite d'objets $(X_k)_{k\geq1}$ *converge* vers l'objet $X$, et l'on écrit $X_k\to X$, si $d(X_k,X)\to0$ (en particulier, $d(X_k,X)$ est finie à partir d'un certain rang).

Quand $I$ est fini, la borne supérieure est un maximum, donc un nombre. Quand $I$ est infini, la borne supérieure peut valoir $+\infty$ (par exemple, pour une fonction non bornée et la fonction nulle) ; nous acceptons cette valeur. Pour les fonctions continues sur $[0,1]$, la borne supérieure est un maximum, et nous retrouvons la définition 7.

**Proposition 1.** *Si $I$ est fini, alors $X_k\to X$ si et seulement si $X_k(i)\to X(i)$ pour chaque $i\in I$.*

*Démonstration.* Pour chaque $i$, $|X_k(i)-X(i)|\leq d(X_k,X)$, donc la convergence des objets entraîne la convergence de chaque paramètre. Réciproquement, si chacun des paramètres, en nombre fini, converge, alors le maximum des $|I|$ écarts tend vers 0. □

Ainsi, pour les matrices, les triangles ou les polynômes, la limite d'une suite d'objets se calcule paramètre par paramètre. Pour les fonctions, où $I=[0,1]$ est infini, la définition demande davantage : l'écart doit tendre vers 0 *simultanément* en tous les points. C'est la convergence uniforme ; la remarque ci-dessous montre pourquoi c'est le bon choix.

*Remarque* (pourquoi pas paramètre par paramètre). Pour une infinité de paramètres, la convergence de chaque paramètre (la *convergence simple* : $g_k(x)\to g(x)$ pour chaque $x$) est

trop faible. Soit, pour $k \geq 2$,

$$g_k(x) = \begin{cases} k^2 x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{k}, \\ 2k - k^2 x, & \frac{1}{k} \leq x \leq \frac{2}{k}, \\ 0, & \frac{2}{k} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Pour chaque $x$ fixé, $g_k(x) \to 0$ : $g_k(0) = 0$, et pour $x > 0$ on a $g_k(x) = 0$ dès que $\frac{2}{k} < x$. Pourtant $\int_0^1 g_k = 1$ pour tout $k$, alors que l'intégrale de la limite est 0. Donc l'intégrale, la grandeur qui nous intéresse, ne serait pas continue pour la convergence simple. Pour la convergence uniforme, elle est continue (lemme 4).

### 2.3 Grandeurs continues

---

**Définition 10.** Soit $\mathcal{O}$ une classe d'objets à paramètres indexés par $I$ et $\Phi : \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ une fonction (une *grandeur* associée aux objets). On dit que $\Phi$ est *continue en l'objet* $X \in \mathcal{O}$ si, pour toute suite $(X_k)$ d'objets de $\mathcal{O}$ avec $X_k \to X$, on a $\Phi(X_k) \to \Phi(X)$. La grandeur $\Phi$ est *continue sur* $\mathcal{O}$ si elle est continue en chaque objet de $\mathcal{O}$.

C'est exactement la définition du lycée rappelée dans l'introduction : si les paramètres de $X_k$ se rapprochent des paramètres de $X$, alors $\Phi(X_k)$ se rapproche de $\Phi(X)$. Pour une fonction d'une variable ($I$ à un seul élément), nous retrouvons la définition habituelle. (Comme pour les fonctions d'une variable, on peut montrer que cette définition équivaut à la forme avec $\varepsilon$ et $\delta$ ; nous n'aurons pas besoin de cette équivalence.)

**Proposition 2.** *a) Chaque paramètre $X \mapsto X(i)$ est une grandeur continue.*

*b) Les sommes, les produits et les quotients (à dénominateur non nul sur $\mathcal{O}$) de grandeurs continues sont continus, et si $\Phi$ est continue, alors $|\Phi|$ est aussi continue. Si $\Phi$ est continue à valeurs réelles, si toutes ses valeurs sont dans un intervalle $J$ et si $\omega : J \to \mathbb{R}$ est continue, alors $\omega \circ \Phi$ est continue.*

*c) Par conséquent, toute expression polynomiale en un nombre fini de paramètres est une grandeur continue.*

*Démonstration.* a) $|X_k(i) - X(i)| \leq d(X_k, X) \to 0$. b) Soit $X_k \to X$ dans $\mathcal{O}$. Alors $\Phi(X_k) \to \Phi(X)$ et $\Psi(X_k) \to \Psi(X)$ pour les grandeurs continues $\Phi$, $\Psi$, et les règles de calcul sur les limites de suites donnent la conclusion pour les sommes, les produits et les quotients. Pour le module, $\big||\Phi(X_k)| - |\Phi(X)|\big| \leq |\Phi(X_k) - \Phi(X)|$. Pour la composition, les nombres $\Phi(X_k)$ sont dans $J$ et tendent vers $\Phi(X) \in J$, et $\omega$ est continue en $\Phi(X)$, donc $\omega(\Phi(X_k)) \to \omega(\Phi(X))$ (caractérisation séquentielle de la continuité des fonctions d'une variable). c) D'après a) et b). □

La variante de b) avec un intervalle $J$ quelconque compte : elle couvre $\sqrt{\cdot}$ (définie sur $[0, +\infty)$), arccos et arcsin (définies sur $[-1, 1]$).

**Proposition 3** (stabilité des inégalités strictes)**.** *Soit $\Phi : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ continue en $X \in \mathcal{O}$, avec $\Phi(X) > 0$. Alors il existe $\delta > 0$ tel que $\Phi(Y) > 0$ pour tout $Y \in \mathcal{O}$ avec $d(Y, X) < \delta$.*

*Démonstration.* Supposons le contraire : pour chaque $k \geq 1$, il existe $Y_k \in \mathcal{O}$ avec $d(Y_k, X) < \frac{1}{k}$ et $\Phi(Y_k) \leq 0$. Alors $Y_k \to X$, donc $\Phi(Y_k) \to \Phi(X)$ ; l'inégalité large se conserve à la limite, donc $\Phi(X) \leq 0$, contradiction. □

Appliquée à $-\Phi$, respectivement à $|\Phi|$, la proposition dit la même chose pour $\Phi(X) < 0$, respectivement $\Phi(X) \neq 0$. Intuitivement : une inégalité stricte entre grandeurs continues reste vraie pour de petites perturbations des paramètres.

### 2.4 Classes denses et principe d'extension

---

**Définition 11.** Une sous-classe $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{O}$ est *dense* dans $\mathcal{O}$ si tout objet de $\mathcal{O}$ est la limite d'une suite d'objets de $\mathcal{D}$.

**Théorème 1** (principe d'extension)**.** *Soient $\Phi, \Psi : \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ des grandeurs continues et $\mathcal{D}$ dense dans $\mathcal{O}$.*

*a) Si $\Phi = \Psi$ sur $\mathcal{D}$, alors $\Phi = \Psi$ sur $\mathcal{O}$.*

*b) Si $\Phi, \Psi$ sont à valeurs réelles et $\Phi \leq \Psi$ sur $\mathcal{D}$, alors $\Phi \leq \Psi$ sur $\mathcal{O}$.*

*Démonstration.* Soit $X \in \mathcal{O}$ et $X_k \in \mathcal{D}$ avec $X_k \to X$. D'après la définition 10, $\Phi(X_k) \to \Phi(X)$ et $\Psi(X_k) \to \Psi(X)$. a) $\Phi(X_k) = \Psi(X_k)$ pour tout $k$ ; en passant à la limite, $\Phi(X) = \Psi(X)$. b) De même, l'inégalité large se conserve à la limite. □

Pour les fonctions d'une variable réelle, la partie a) est le « principe de densité » de [1].

**La classe de l'hypothèse.** Dans le théorème 1, $\mathcal{O}$ est la classe sur laquelle nous savons que $\Phi$ et $\Psi$ sont définies et continues, et $\mathcal{D}$ doit être dense dans $\mathcal{O}$ elle-même. Si le problème donne une hypothèse qui définit une classe plus petite (par exemple, les couples $(A, B)$ avec $A^2 + B^2 = 2AB$), alors c'est la densité dans cette classe qui compte, et non dans l'ensemble de tous les objets : les approximants doivent eux aussi vérifier l'hypothèse. Dans le problème 1, la translation par $xI_n$ conserve l'hypothèse ; dans le problème 2, l'hypothèse porte sur la matrice fixe $M$, et les matrices $X$ que l'on approche n'ont rien à vérifier. Dans la section 4.1, nous verrons un problème d'olympiade où cette condition manque et où la conclusion ne s'étend plus.

**La stratégie.** Pour un problème qui demande une propriété pour tous les objets :

1. on écrit la propriété comme une égalité (ou une inégalité large) entre grandeurs continues ;
2. on trouve une classe dense sur laquelle la propriété est facile à démontrer ;
3. on applique le théorème 1.

L'inégalité stricte ne se conserve pas à la limite : si $\Phi < \Psi$ sur $\mathcal{D}$, on obtient seulement $\Phi \leq \Psi$ sur $\mathcal{O}$.

**Liste de vérifications.** Pour pouvoir dire « par continuité », il faut préciser :

(a) les objets et leurs paramètres (ce qui varie et ce qui reste fixe) ;

(b) le fait que les grandeurs utilisées sont définies et continues sur la classe $\mathcal{O}$ *tout entière* (les dénominateurs ne s'annulent pas, les racines carrées et arccos reçoivent des arguments dans leur domaine) ;

(c) une grandeur continue qui exprime la conclusion et une classe dense dans la classe même où l'hypothèse est vérifiée ;

(d) le fait que, d'une égalité (ou inégalité) entre grandeurs, on peut revenir à la propriété demandée.

## 2.5 Les problèmes revisités

**Problème 1.** L'objet est le couple $(P, Q)$, à $2n^2$ paramètres, les coefficients des deux matrices ; d'après la proposition 1, la convergence de la définition 1 est exactement la limite de la définition 9. La grandeur $\Phi(P, Q) = \det P - \det Q$ est polynomiale en les paramètres, donc continue (proposition 2), et le lemme 1 dit que $\mathcal{H}^*$ est dense dans $\mathcal{H}$. Le théorème 1 a), appliqué à la classe $\mathcal{H}$, est l'étape 3.

**Problème 2.** D'après la proposition 1, la limite d'une suite de matrices au sens de la définition 5 (coefficient par coefficient) est exactement la limite de la définition 9. Le lemme 3 dit que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Les coefficients de $X \mapsto MX - XM$ sont des grandeurs continues (proposition 2), nulles sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ; le théorème 1 donne l'étape 2 de la solution.

Le même mécanisme donne des résultats classiques. Par exemple, pour toutes $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, les matrices $AB$ et $BA$ ont le même polynôme caractéristique : si $A$ est inversible, $\det(tI_n - BA) = \det\big(A^{-1}(tI_n - AB)A\big) = \det(tI_n - AB)$ ; avec $B$ et $t$ fixés, les deux membres sont polynomiaux en les coefficients de $A$, donc continus, et égaux sur la classe dense $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

**Problème 3.** Pour les fonctions continues, la limite de la définition 9 est la convergence uniforme de la définition 7. Le lemme 4 dit exactement que $L$ est une grandeur continue sur la classe des fonctions continues sur $[0, 1]$, le lemme 5 dit que les fonctions non dérivables forment une classe dense, et le théorème 1 donne à nouveau la conclusion.

## 2.6 Triangles

Soit $\mathcal{O}$ la classe des triangles non dégénérés, chacun donné par les six coordonnées de ses sommets. D'après la proposition 1, une suite de triangles $A_kB_kC_k$ converge vers $ABC$ si et seulement si $A_k \to A$, $B_k \to B$, $C_k \to C$ (coordonnée par coordonnée). Nous utilisons cette classe dans l'exercice sur les triangles scalènes, à la fin du texte.

## 2.7 Familles continues et propriété de Darboux

Dans beaucoup de problèmes, les objets n'apparaissent pas sous forme de suite, mais sous forme de famille dépendant d'un nombre réel : les tangentes à un cercle, les droites qui tournent autour d'un point, les points qui se déplacent sur des segments.

**Définition 12.** Soit $J \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle et $\mathcal{O}$ une classe d'objets à paramètres indexés par un ensemble fini $I$. Une *famille continue* d'objets est une fonction $t \mapsto X_t$, $J \to \mathcal{O}$, pour laquelle chaque paramètre $t \mapsto X_t(i)$ est une fonction continue de $t$.

D'après la proposition 1, si $t_k \to t$ dans $J$, alors $X_{t_k} \to X_t$.

**Proposition 4.** *Soit $(X_t)_{t\in J}$ une famille continue et $\Phi : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ une grandeur continue. Alors la fonction $t \mapsto \Phi(X_t)$ est continue sur $J$. En particulier, si $\alpha, \beta \in J$ et $\Phi(X_\alpha) \leq 0 \leq \Phi(X_\beta)$, il existe $t$ entre $\alpha$ et $\beta$ avec $\Phi(X_t) = 0$.*

*Démonstration.* Si $t_k \to t$, alors $X_{t_k} \to X_t$, donc $\Phi(X_{t_k}) \to \Phi(X_t)$ (définition 10). La fonction $t \mapsto \Phi(X_t)$ est donc continue sur l'intervalle $J$ et a la propriété de Darboux [1]. □

# 3. Applications

## 3.1 Problème 4. IMC 2004, jour 2, problème 4

**Énoncé.** Pour $n \geq 1$, soit $M$ une matrice complexe de taille $n \times n$, de valeurs propres distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, de multiplicités $m_1, m_2, \ldots, m_k$. On considère l'opérateur linéaire $L_M$ défini par $L_M(X) = MX + XM^T$, pour toute matrice complexe $X$ de taille $n \times n$. Déterminer les valeurs propres de $L_M$ et leurs multiplicités.

*Source : [23]. La solution officielle traite d'abord le cas où les valeurs propres de $M$ sont distinctes et où toutes les sommes $\lambda_r + \lambda_s$ sont différentes, puis observe que toute $M$ est limite de matrices de ce type et conclut « by the continuity of the eigenvalues ». La phrase est correcte, mais les valeurs propres n'ont pas d'ordre naturel, donc, prises une par une, elles ne sont pas des grandeurs au sens de la section 2. Nous montrons comment la rendre rigoureuse.*

**Réponse.** Les valeurs propres sont $2\lambda_r$, de multiplicité $m_r^2$ $(1 \leq r \leq k)$, et $\lambda_r + \lambda_s$, de multiplicité $2m_r m_s$ $(1 \leq r < s \leq k)$ ; si certains de ces nombres coïncident, leurs multiplicités s'additionnent.

**Solution.** On note $\mu_1, \ldots, \mu_n$ les valeurs propres de $M$, écrites avec leurs multiplicités (chaque $\lambda_r$ apparaît $m_r$ fois). Soit $p_M(t) = \det(t\,\mathrm{Id} - L_M)$ le polynôme caractéristique de $L_M$, c'est-à-dire le déterminant de la matrice de taille $n^2 \times n^2$ de $X \mapsto tX - L_M(X)$ dans la base $(E_{ij})$, et

$$q_M(t) = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{n} (t - \mu_i - \mu_j).$$

En regroupant les facteurs de $q_M$ selon les valeurs $\lambda_r$, $\lambda_s$ de $\mu_i$, $\mu_j$, on obtient

$$q_M(t) = \prod_{r=1}^{k} (t - 2\lambda_r)^{m_r^2} \prod_{1 \leq r < s \leq k} (t - \lambda_r - \lambda_s)^{2m_r m_s}.$$

La réponse équivaut donc à l'identité $p_M(t) = q_M(t)$, pour toute $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et tout $t \in \mathbb{C}$. Fixons $t$ ; les objets sont les matrices $M$, à $n^2$ paramètres.

*Étape 1 : $M \mapsto p_M(t)$ est continue.* La matrice de $L_M$ dans la base $(E_{ij})$ a des coefficients linéaires en les coefficients de $M$, donc $p_M(t)$ est une expression polynomiale en les coefficients de $M$ (proposition 2).

*Étape 2 : $M \mapsto q_M(t)$ est continue.* C'est ici la partie délicate, la « continuité des valeurs propres ». Nous ne suivons pas les valeurs propres une par une, mais seulement une expression symétrique en elles. Quand on permute les nombres $\mu_1, \ldots, \mu_n$, les facteurs de $q_M(t)$ sont seulement permutés, donc $q_M(t)$ est un polynôme symétrique en $\mu_1, \ldots, \mu_n$ (à coefficients qui dépendent polynomialement de $t$). D'après le théorème fondamental des polynômes symétriques [4], il s'écrit comme un polynôme en $e_1, \ldots, e_n$, les polynômes symétriques élémentaires de $\mu_1, \ldots, \mu_n$. D'après les relations de Viète, $(-1)^k e_k$ est le coefficient de $t^{n-k}$ dans $\det(tI_n - M)$, donc une expression polynomiale en les coefficients de $M$. Ainsi $q_M(t)$ est une expression polynomiale en les coefficients de $M$, donc une grandeur continue.

*Étape 3 : l'égalité sur une classe dense.* Soit $\mathcal{D}$ la classe des matrices à $n$ valeurs propres distinctes. Une telle matrice a une base de vecteurs propres $v_1, \ldots, v_n$, avec $Mv_i = \mu_i v_i$ [3]. Alors

$$L_M(v_i v_j^T) = (Mv_i)v_j^T + v_i(Mv_j)^T = (\mu_i + \mu_j)\, v_i v_j^T.$$

Les $n^2$ matrices $v_i v_j^T$ sont linéairement indépendantes : si $\sum c_{ij} v_i v_j^T = O_n$, alors $VCV^T = O_n$, où $V$ a pour colonnes $v_1, \ldots, v_n$ (elle est inversible) et $C = (c_{ij})$, donc $C = O_n$. Elles forment

donc une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, constituée de vecteurs propres de $L_M$ ; dans cette base, la matrice de $L_M$ est diagonale, de coefficients diagonaux $\mu_i + \mu_j$, et le polynôme caractéristique ne dépend pas de la base. Donc $p_M(t) = q_M(t)$ sur $\mathcal{D}$. (Nous n'avons pas besoin que les sommes $\mu_i + \mu_j$ soient distinctes.)

*Étape 4 : $\mathcal{D}$ est dense.* Toute matrice complexe est semblable à une matrice triangulaire supérieure [3] : $M = PTP^{-1}$, et la diagonale de $T$ contient les valeurs propres $t_{11}, \dots, t_{nn}$. Pour $\varepsilon$ réel, la matrice $T_\varepsilon = T + \varepsilon \operatorname{diag}(1, 2, \dots, n)$ a sur sa diagonale les nombres $t_{ii} + i\varepsilon$, deux à deux distincts, sauf pour au plus $\frac{n(n-1)}{2}$ valeurs de $\varepsilon$ (l'égalité $t_{ii} + i\varepsilon = t_{jj} + j\varepsilon$, avec $i \neq j$, détermine $\varepsilon$). On choisit $\varepsilon_k \to 0$ en évitant ces valeurs. Les matrices $M_k = PT_{\varepsilon_k}P^{-1} = M + \varepsilon_k P \operatorname{diag}(1, \dots, n)P^{-1}$ ont $n$ valeurs propres distinctes et $M_k \to M$.

*Étape 5 : l'extension.* Avec $t$ fixé, $M \mapsto p_M(t)$ et $M \mapsto q_M(t)$ sont continues sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et égales sur la classe dense $\mathcal{D}$ ; d'après le théorème 1 a), elles sont égales sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. □

> *Remarque* (un chemin sans limites). La trigonalisation donne aussi une solution directe. Avec $X = PYP^T$, on a $L_M(X) = P\,(TY + YT^T)\,P^T$, donc $L_M$ a le même polynôme caractéristique que $L_T$. Un calcul direct donne
>
> $$L_T(E_{ij}) = (t_{ii} + t_{jj})E_{ij} + \sum_{l<i} t_{li}E_{lj} + \sum_{l<j} t_{lj}E_{il},$$
>
> donc la matrice de $L_T$ dans la base $(E_{ij})$, ordonnée lexicographiquement selon $(i, j)$, est triangulaire, de diagonale $t_{ii}+t_{jj}$. Comme nous avons de toute façon utilisé la trigonalisation à l'étape 4, la continuité ne raccourcit pas la solution ici. Son rôle est de montrer que la phrase de la solution officielle peut être rendue rigoureuse avec les outils de la section 2.

### 3.2 Problème 5. La matrice adjointe d'une matrice d'ordre 3

---

**Énoncé.** Soient $X, Y, Z \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. On note $A^*$ la matrice adjointe de la matrice $A$ (la transposée de sa comatrice).

**(a)** Démontrer l'identité

$$(X + Y + Z)^* + X^* + Y^* + Z^* = (X + Y)^* + (Y + Z)^* + (Z + X)^*.$$

**(b)** Démontrer l'équivalence

$$(X + Y + Z)^* = 3(X^* + Y^* + Z^*) \iff (X - Y)^* + (Y - Z)^* + (Z - X)^* = O_3.$$

*Source : Gazeta Matematică [19].*

**Solution.** *Idée.* Pour une matrice inversible, la matrice adjointe vaut $(\det A)A^{-1}$, et le théorème de Cayley-Hamilton l'écrit comme un polynôme de degré deux en $A$. La formule ainsi obtenue s'étend par continuité à toutes les matrices, et grâce à elle les deux questions deviennent des calculs sur une expression « de degré deux ».

*Étape 1 : la formule pour les matrices inversibles.* Pour $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, soient $s_1(A) = \operatorname{tr} A$, $s_2(A) = \frac{1}{2}\big((\operatorname{tr} A)^2 - \operatorname{tr}(A^2)\big)$ et $s_3(A) = \det A$. Le théorème de Cayley-Hamilton donne $A^3 - s_1(A)A^2 + s_2(A)A - s_3(A)I_3 = O_3$, c'est-à-dire

$$A\big(A^2 - s_1(A)A + s_2(A)I_3\big) = (\det A)\, I_3.$$

Si $A$ est inversible, on multiplie à gauche par $A^{-1}$ et, comme $A^* = (\det A)A^{-1}$, on obtient

$$A^* = A^2 - s_1(A)A + s_2(A)I_3. \tag{F}$$

*Étape 2 : la formule pour toute matrice.* Les objets sont les matrices $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, à 9 paramètres. Chaque coefficient de la matrice $\Phi(A) = A^* - A^2 + s_1(A)A - s_2(A)I_3$ est une expression polynomiale en les coefficients de $A$ (les coefficients de $A^*$ sont des mineurs d'ordre 2), donc c'est une grandeur continue (proposition 2). D'après l'étape 1, $\Phi$ est nulle sur les matrices inversibles, qui forment une classe dense (lemme 3, pour $n = 3$). D'après le théorème 1 a), appliqué à chaque coefficient, $\Phi = O_3$ sur tout $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ : la formule (F) est vraie pour toute matrice.

*Étape 3 : une expression de degré deux.* On note $Q(A) = A^2 - s_1(A)A + s_2(A)I_3$ et, pour $U, V \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$,

$$B(U,V) = UV + VU - (\operatorname{tr} U)V - (\operatorname{tr} V)U + \big(\operatorname{tr} U \operatorname{tr} V - \operatorname{tr}(UV)\big)I_3.$$

En développant, $Q(U+V) = Q(U) + Q(V) + B(U,V)$ ; de plus, $B$ est symétrique et linéaire en chaque argument, et $Q(-U) = Q(U)$. D'après l'étape 2, $A^* = Q(A)$ pour toute matrice $A$.

*Étape 4 : la conclusion.* a) En appliquant deux fois la relation de l'étape 3,

$$(X+Y+Z)^* = Q(X) + Q(Y) + Q(Z) + B(X,Y) + B(Y,Z) + B(Z,X),$$

et $(X+Y)^* + (Y+Z)^* + (Z+X)^* = 2\big(Q(X)+Q(Y)+Q(Z)\big) + B(X,Y) + B(Y,Z) + B(Z,X)$. La différence des deux membres de l'identité vaut donc 0.

b) Comme $Q(X-Y) = Q(X) + Q(Y) - B(X,Y)$,

$$(X-Y)^* + (Y-Z)^* + (Z-X)^* = 2\big(Q(X)+Q(Y)+Q(Z)\big) - B(X,Y) - B(Y,Z) - B(Z,X),$$

et $(X+Y+Z)^* - 3(X^*+Y^*+Z^*) = B(X,Y)+B(Y,Z)+B(Z,X) - 2\big(Q(X)+Q(Y)+Q(Z)\big)$. Les deux expressions sont opposées, donc l'une est égale à $O_3$ exactement quand l'autre est égale à $O_3$. □

> *Remarque.* On peut éviter la limite : les coefficients de $A^*$ sont des mineurs d'ordre 2, donc des polynômes homogènes de degré deux en les coefficients de $A$, et a) et b) sont des identités valables pour toute application de ce type. La solution ci-dessus montre cependant comment on obtient la formule (F) pour toute matrice à partir du cas inversible, exactement comme dans les problèmes 1 et 2.

### 3.3 Problème 6. ONM 2009, classe de XII$^{\text{e}}$, problème 4

---

**Énoncé.** Déterminer toutes les fonctions $f : [0,1] \to [0,1]$ continues et bijectives telles que

$$\int_0^1 g\big(f(x)\big)\,dx = \int_0^1 g(x)\,dx$$

pour toute fonction continue $g : [0,1] \to \mathbb{R}$.

*Source : [20].*

**Solution.** *Idée.* Si $g$ pouvait être l'indicatrice d'un intervalle $[a,b]$, l'hypothèse dirait que $f$ envoie dans $[a,b]$ un ensemble de longueur $b-a$. L'indicatrice n'est pas continue, donc nous l'encadrons entre deux fonctions continues « en trapèze » et nous passons à la limite.

*Étape 1 : l'image réciproque d'un intervalle.* Une fonction continue et bijective sur $[0,1]$ est strictement monotone, et sa réciproque est elle aussi continue et strictement monotone. Pour $0 \leq a < b \leq 1$, l'ensemble $f^{-1}([a,b])$ est donc un intervalle $[c,d]$ et $\int_0^1 \mathbf{1}_{[a,b]}\big(f(x)\big)\,dx = d - c$.

*Étape 2 : l'encadrement.* Pour $\varepsilon > 0$, soit $g_\varepsilon$ la fonction continue égale à 1 sur $[a,b]$, à 0 en dehors de $[a-\varepsilon, b+\varepsilon]$ et affine entre les deux (restreinte à $[0,1]$). Comme $g_\varepsilon \geq \mathbf{1}_{[a,b]}$,

$$d - c \leq \int_0^1 g_\varepsilon\big(f(x)\big)\,dx = \int_0^1 g_\varepsilon(x)\,dx \leq b - a + \varepsilon.$$

Pour $0 < \varepsilon < \frac{b-a}{2}$, soit $h_\varepsilon$ la fonction continue égale à 1 sur $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$, à 0 en dehors de $[a,b]$ et affine entre les deux. Comme $h_\varepsilon \le \mathbf{1}_{[a,b]}$,

$$d - c \ge \int_0^1 h_\varepsilon\big(f(x)\big)\,dx = \int_0^1 h_\varepsilon(x)\,dx \ge b - a - 2\varepsilon.$$

En faisant $\varepsilon \to 0$, on obtient $d - c = b - a$ : l'image réciproque de tout intervalle a la même longueur que l'intervalle.

*Étape 3 : la conclusion.* Si $f$ est croissante, $f^{-1}([0,y]) = [0, f^{-1}(y)]$ est de longueur $y$, donc $f^{-1}(y) = y$ et $f(x) = x$. Si $f$ est décroissante, $f^{-1}([0,y]) = [f^{-1}(y), 1]$ est de longueur $y$, donc $f^{-1}(y) = 1 - y$ et $f(x) = 1 - x$. Les deux fonctions vérifient l'hypothèse (pour la seconde, par le changement de variable $x \mapsto 1 - x$). □

> *Remarque.* La limite de l'étape 2 est une limite ordinaire, selon un seul nombre $\varepsilon$ : les trapèzes ne se rapprochent pas de l'indicatrice pour la distance du « plus grand écart » (la distance reste égale à 1). Le problème suivant part de là et a besoin de la continuité de la section 2 elle-même.

### 3.4 Problème 7. Une variante avec des puissances

---

**Énoncé.** Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue et bijective telle que

$$\int_0^1 f(x)^k\,dx = \frac{1}{k+1} \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

Montrer que $f(x) = x$ pour tout $x$ ou $f(x) = 1 - x$ pour tout $x$.

*Problème nouveau, construit à partir du problème 6.*

**Solution.** *Idée.* L'hypothèse dit que l'égalité du problème 6 a lieu pour $g(x) = x^k$, donc pour tout polynôme. Les polynômes sont denses parmi les fonctions continues, et la grandeur qui exprime l'égalité est continue ; nous l'étendons à toutes les fonctions continues et nous appliquons le problème 6.

*Étape 1 : les objets et la grandeur.* Les objets sont les fonctions continues $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, avec la distance du « plus grand écart » $d(g,h) = \max_{[0,1]} |g - h|$, comme dans le problème 3 (exemple d) de la section 2). Soit

$$\Phi(g) = \int_0^1 g\big(f(x)\big)\,dx - \int_0^1 g(x)\,dx.$$

Comme $f$ est à valeurs dans $[0,1]$, on a $|g(f(x)) - h(f(x))| \le d(g,h)$ pour tout $x$, donc

$$|\Phi(g) - \Phi(h)| \le \int_0^1 |g(f(x)) - h(f(x))|\,dx + \int_0^1 |g(x) - h(x)|\,dx \le 2\,d(g,h),$$

et $\Phi$ est une grandeur continue.

*Étape 2 : la classe dense.* Pour $g(x) = x^k$, l'hypothèse dit exactement $\Phi(g) = \int_0^1 f(x)^k\,dx - \frac{1}{k+1} = 0$. Comme $\Phi$ est linéaire, $\Phi(P) = 0$ pour tout polynôme $P$. D'après le théorème d'approximation de Weierstrass (que nous utilisons sans démonstration), toute fonction continue sur $[0,1]$ est la limite d'une suite de polynômes pour la distance $d$ : les polynômes forment une classe dense.

*Étape 3 : l'extension.* D'après le théorème 1 a), $\Phi(g) = 0$ pour toute fonction continue $g$. La fonction $f$ vérifie donc l'hypothèse du problème 6, de sorte que $f(x) = x$ ou $f(x) = 1 - x$ ; les deux fonctions vérifient aussi l'hypothèse de ce problème, car $\int_0^1 x^k\,dx = \int_0^1 (1-x)^k\,dx = \frac{1}{k+1}$. □

# 4. Quand cela ne fonctionne pas

Chacun des exemples ci-dessous enfreint l'une des vérifications de la liste de la section 2.4.

## 4.1 La classe dense doit être dans la classe de l'hypothèse : OJM 2025, classe de XI$^{e}$, problème 2

**Énoncé.** Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ a la propriété $(\mathcal{P})$ si $\det(A+X_{ij}) = \det(A+X_{ji})$, quels que soient $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, où $X_{ij} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est la matrice qui a 1 en position $(i, j)$ et 0 ailleurs.

**(a)** Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ a la propriété $(\mathcal{P})$ et $\det(A) \neq 0$, alors $A = A^T$.

**(b)** Donner un exemple de matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui a la propriété $(\mathcal{P})$, mais telle que $A \neq A^T$.

*Source : [17]. La solution ci-dessous est celle du barème.*

**Solution.** a) En développant selon la ligne $i$, $\det(A + X_{ij}) = \det A + \delta_{ij}$, où $\delta_{ij}$ est le cofacteur du coefficient en position $(i, j)$. La propriété $(\mathcal{P})$ signifie donc $\delta_{ij} = \delta_{ji}$, c'est-à-dire que la matrice adjointe $A^*$ (la transposée de la comatrice) est symétrique. Pour $d = \det A \neq 0$, on a $AA^* = dI_n = (dI_n)^T = (A^*A)^T = A^T(A^*)^T = A^TA^*$, et $\det A^* = d^{n-1} \neq 0$, donc $A = A^T$. b) La matrice $A = X_{11} + X_{12}$ convient : pour $n \geq 3$, chaque $A + X_{ij}$ a au moins une ligne nulle, donc tous les déterminants valent 0.

**La leçon.** Les matrices inversibles sont denses dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (lemme 3), la grandeur $A \mapsto A - A^T$ est continue et, d'après a), elle est nulle sur les matrices inversibles ayant la propriété $(\mathcal{P})$. Pourtant, la conclusion ne s'étend pas : la matrice de b) a $(\mathcal{P})$ et n'est pas symétrique. L'explication est la vérification (c). La classe sur laquelle l'hypothèse est vérifiée est $\mathcal{O} = \{A : A \text{ vérifie } (\mathcal{P})\}$, et ses éléments inversibles *ne sont pas* denses dans $\mathcal{O}$ : ils sont symétriques, et une limite de matrices symétriques est symétrique, donc $X_{11} + X_{12} \in \mathcal{O}$ n'est pas leur limite. La perturbation $A \mapsto A + tI_n$, qui a fonctionné dans les problèmes 1 et 2, ne reste pas ici dans $\mathcal{O}$ : pour $A = X_{11} + X_{12}$ et $t \notin \{0, -1\}$, la matrice $A + tI_n$ est inversible (triangulaire supérieure, de déterminant $(1 + t)t^{n-1}$) et non symétrique, donc, d'après a), elle n'a pas $(\mathcal{P})$.

## 4.2 Grandeurs non continues : le rang et la similitude

Soient $A = E_{12}$ et $B = E_{11}$, le couple de l'étape 4 du problème 2 : $AB = O_n$ et $BA = E_{12}$. Pour $A$ inversible, $\operatorname{rang}(AB) = \operatorname{rang} B = \operatorname{rang}(BA)$, et les matrices inversibles sont denses ; pourtant, ici, les rangs sont 0 et 1. Le rang n'est pas une grandeur continue, car il n'a pas la propriété de Darboux : sur la famille continue $t \mapsto tI_n$, $t \in [0, 1]$, il prend la valeur 0 pour $t = 0$ et la valeur $n$ pour $t \neq 0$, mais aucune valeur intermédiaire (par exemple $\frac{1}{2}$), ce qui, d'après la proposition 4, est impossible pour une grandeur continue. La vérification (b) échoue. De même, pour $A$ inversible, $BA = A^{-1}(AB)A$ est semblable à $AB$, mais pour le couple ci-dessus, $AB = O_n$ et $BA \neq O_n$ ne sont pas semblables (la seule matrice semblable à $O_n$ est $O_n$), bien qu'elles aient le même polynôme caractéristique, $t^n$ (section 2). La similitude ne s'écrit pas comme une égalité entre grandeurs continues.

### 4.3 La distance choisie compte : la longueur d'un graphe

Pour $k \geq 1$, soit $g_k : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction qui, sur chaque intervalle $\left[\frac{j}{k}, \frac{j+1}{k}\right]$, croît avec la pente 2 sur la première moitié et est constante sur la seconde, avec $g_k(0) = 0$ ; ainsi $g_k\left(\frac{j}{k}\right) = \frac{j}{k}$. Alors $|g_k(x) - x| \leq \frac{1}{2k}$, donc $g_k$ converge uniformément vers $g(x) = x$. Le graphe de $g_k$ a cependant, sur chaque intervalle, un segment de longueur $\frac{\sqrt{5}}{2k}$ et un de longueur $\frac{1}{2k}$, donc une longueur totale de $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, pour tout $k$, alors que le graphe de la limite a pour longueur $\sqrt{2}$. La longueur du graphe n'est pas une grandeur continue pour la distance uniforme (vérification (b)). La distance du « plus grand écart » contrôle les valeurs, pas les pentes.

### 4.4 Les avertissements, rassemblés

- *L'inégalité stricte devient large.* Sur $\mathcal{O} = [0, +\infty)$, avec $\mathcal{D} = (0, +\infty)$ dense, $\Phi(x) = x$ et $\Psi(x) = 0$ vérifient $\Phi > \Psi$ sur $\mathcal{D}$, mais $\Phi(0) = \Psi(0)$.
- *La convergence simple ne conserve pas l'intégrale* : voir l'exemple à pics de la section 2.2.
- *La concourance peut se perdre à la limite.* Les droites $y = 0$, $\frac{1}{k}x - y - 1 = 0$ et $\frac{1}{k}x + y - 1 = 0$ passent toutes par $(k, 0)$. Leurs triplets tendent vers $(0, 1, 0)$, $(0, -1, -1)$ et $(0, 1, -1)$, c'est-à-dire vers les droites parallèles $y = 0$, $y = -1$ et $y = 1$, qui n'ont aucun point commun. C'est pourquoi, quand on exprime la concourance par l'annulation du déterminant des coefficients, les deux premières droites doivent être non parallèles (vérification (d), exercice 4).

## 5. Exercices

**1.** *(IMC 2004, jour 1, problème 3 a) [18].)* Soient $n \geq 2$ et $S_n$ l'ensemble des sommes $x_1 + \cdots + x_n$ avec $0 \leq x_1, \ldots, x_n \leq \frac{\pi}{2}$ et $\sin x_1 + \cdots + \sin x_n = 1$. Montrer que $S_n$ est un intervalle.

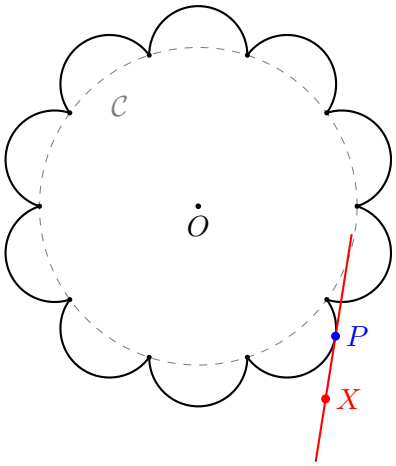
*Indication : avec $y_k = \sin x_k$, $S_n$ est l'ensemble des valeurs de $\sum \arcsin y_k$ sur $Y = \{y \in [0,1]^n : y_1 + \cdots + y_n = 1\}$. Pour $y, y' \in Y$, les points $(1-t)y + ty'$, $t \in [0,1]$, sont dans $Y$ et forment une famille continue ; la grandeur $\sum \arcsin y_k$ est continue (proposition 2 b), avec* arcsin *continue sur $[0,1]$), donc la proposition 4 donne toutes les valeurs intermédiaires. La solution officielle utilise la notion de connexité.*

**2.** Démontrer, d'abord pour des matrices inversibles, puis à l'aide du théorème 1, les identités : a) $\det(I_n + AB) = \det(I_n + BA)$ ; b) $(AB)^* = B^*A^*$ ; c) $(A^*)^* = (\det A)^{n-2}A$, pour $n \geq 3$ ; d) le théorème de Cayley-Hamilton, $p_M(M) = O_n$, où $p_M$ est le polynôme caractéristique de $M$.

*Indication : pour b), les objets sont les couples $(A, B)$, à $2n^2$ paramètres, et les couples $(A + t_k I_n, B + t_k I_n)$ dont les deux matrices sont inversibles les approchent. Pour c), si $A$ est inversible, $A^* = (\det A)A^{-1}$. Pour d), la classe dense est celle de l'étape 4 du problème 4 : une matrice à $n$ valeurs propres distinctes s'écrit $P\Lambda P^{-1}$ avec $\Lambda$ diagonale, et $p_M(P\Lambda P^{-1}) = P\, p_M(\Lambda)\, P^{-1} = O_n$.*

**3.** *(Problème de l'auteur, question (a) du problème OJM.17 de [1].)* Soient $n \geq 4$ et $A_1 A_2 \ldots A_n$ un polygone régulier inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$ de centre $O$ et de rayon $R$ (la planète). Sur chaque côté $A_i A_{i+1}$ (avec $A_{n+1} = A_1$), on construit, vers l'extérieur de $\mathcal{C}$, le demi-cercle de diamètre $A_i A_{i+1}$. On appelle *tangente* toute droite tangente à l'un de ces demi-cercles, y compris en

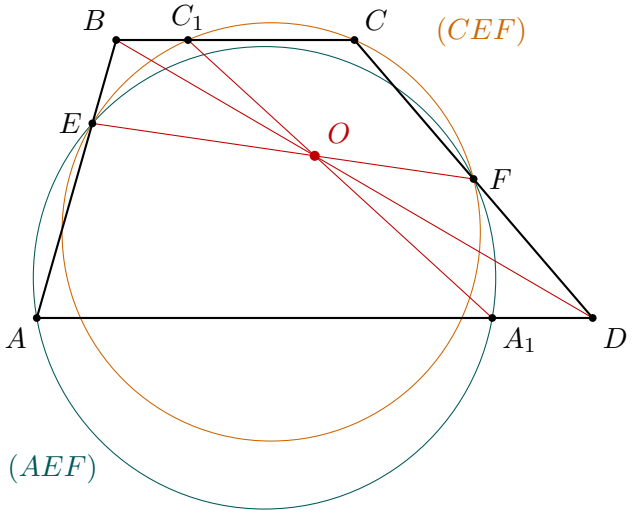
ses extrémités (aux extrémités, la tangente est la perpendiculaire au côté). Montrer que par tout point $X$ tel que $OX \geq R$ passe une tangente.




Le cas $n = 10$ : la tangente au point $P$ d'un pétale passe par le point $X$.

**4.** *(RMM Shortlist 2017, G1 [24].)* Soit $ABCD$ un trapèze avec $AD \parallel BC$, et soient $E$ et $F$ des points à l'intérieur des côtés $[AB]$ et $[DC]$ respectivement. Le cercle circonscrit au triangle $AEF$ recoupe la droite $AD$ en $A_1$, et le cercle circonscrit au triangle $CEF$ recoupe la droite $BC$ en $C_1$ (si le cercle est tangent à la droite, $A_1 = A$, respectivement $C_1 = C$). Montrer que les droites $BD$, $EF$ et $A_1C_1$ sont concourantes.

Supposons le problème résolu dans le cas $EF \nparallel AD$ (on trouvera une solution dans [25, pages 39 à 40]). Comment terminer le problème, c'est-à-dire comment traiter le cas $EF \parallel AD$ ?




Cas 1 ($EF \nparallel AD$) : les droites $BD$, $EF$ et $A_1C_1$ passent par le point $O$.

**5.** *(Putnam 2003, A2 [22].)* Soient $a_1, \ldots, a_n$ et $b_1, \ldots, b_n$ des nombres réels positifs ou nuls. Montrer que

$$(a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n} + (b_1 b_2 \cdots b_n)^{1/n} \leq \big[(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \cdots (a_n + b_n)\big]^{1/n}.$$

*Indication : les objets sont les couples de $n$-uplets à éléments positifs ou nuls, à $2n$ paramètres, et les deux membres sont des grandeurs continues (la racine $n$-ième est continue sur $[0, \infty)$, proposition 2 b). Les couples pour lesquels tous les $a_i > 0$ forment une classe dense (remplacer $a_i$ par $a_i + \frac{1}{k}$). Sur*

*cette classe, si l'un des $b_i$ vaut 0, l'inégalité est immédiate ; sinon, en divisant par $(a_1 \cdots a_n)^{1/n}$ et en posant $y_i = \ln \frac{b_i}{a_i}$, elle devient l'inégalité de Jensen pour la fonction convexe $y \mapsto \ln(1 + e^y)$. Le théorème 1 b) permet de conclure.*

**6.** *(Tournoi des villes, 1990/91, tour d'automne, version de base, classes 10 à 11, problème 4 [21].)* Dans le plan, on considère 20 points, trois à trois non alignés : 10 bleus et 10 rouges. Montrer qu'il existe une droite qui a de chaque côté 5 points bleus et 5 points rouges.

**7.** Montrer que les triangles scalènes (dont les côtés ont des longueurs deux à deux différentes) forment une classe dense dans la classe des triangles non dégénérés.

*Indication : soient $ABC$ un triangle non dégénéré, $w$ un vecteur unitaire de la droite $AB$ et $C_t = C + tw$. Le point $C_t$ reste à la même distance non nulle de la droite $AB$, donc $ABC_t$ est non dégénéré. La condition $C_tA = C_tB$ signifie que $C_t$ est sur la médiatrice de $AB$, qui coupe la droite $\{C + tw\}$ (qui lui est perpendiculaire) en un seul point ; la condition $C_tA = AB$ signifie que $C_t$ est sur un cercle, qui coupe une droite en au plus deux points ; de même pour $C_tB = AB$. Il reste au plus cinq valeurs exclues de $t$.*

## Conclusion

Nous sommes partis de la continuité du lycée, définie pour les fonctions d'une variable réelle, et nous l'avons étendue à des objets qui ne sont pas des nombres : matrices, fonctions, droites, configurations géométriques. Le but était de voir quand on peut formaliser la notion de passage à la limite aussi pour de tels objets. La réponse est celle de la section 2.4 : on peut passer à la limite lorsque la propriété s'écrit comme une égalité ou une inégalité large entre grandeurs continues et se démontre sur une classe dense d'objets ; le théorème 1 l'étend ensuite à tous les objets.

La liste de vérifications (a) à (d) indique ce qu'il faut effectivement écrire : les paramètres des objets ; la continuité des grandeurs sur toute la classe (dénominateurs non nuls, arguments dans le domaine de la racine carrée ou de arccos) ; une classe dense dans la classe même où l'hypothèse est vérifiée ; le chemin retour de l'égalité entre grandeurs à la propriété demandée. Les exemples de la section 4 montrent que chacune de ces vérifications peut échouer.

Beaucoup des problèmes du texte ont aussi une solution sans limites, que nous avons signalée chaque fois.

## Bibliographie


[1] V.-Ș. Constantinescu, *Analiză pentru Olimpiadă, clasa a XI-a* (en roumain), deuxième édition, manuscrit, 2026 (en cours de publication).

[2] V.-Ș. Constantinescu, *Analiză pentru Olimpiadă, clasa a XII-a* (en roumain), deuxième édition, manuscrit, 2026 (en cours de publication).

[3] V.-Ș. Constantinescu, *Algebră pentru Olimpiadă, clasa a XI-a* (en roumain), deuxième édition, manuscrit, 2026 (en cours de publication).

[4] V.-Ș. Constantinescu, *Algebră pentru Olimpiadă, clasa a XII-a* (en roumain), deuxième édition, manuscrit, 2026 (en cours de publication).

[5] V.-Ș. Constantinescu, *The Romanian Higher Algebra and Analysis Olympiad, Volume 1: Grade 11 Analysis. Complete Theory and Problems*, Second Edition, 2026. https://www.amazon.com/dp/B0HC7VS3B6

[6] V.-Ș. Constantinescu, *The Romanian Higher Algebra and Analysis Olympiad, Volume 2: Grade 12 Analysis. Complete Theory and Problems*, Second Edition, 2026. https://www.amazon.com/dp/B0HC7T685W

[7] V.-Ș. Constantinescu, *The Romanian Higher Algebra and Analysis Olympiad, Volume 3: Linear Algebra. Complete Theory and Problems*, Second Edition, 2026. https://www.amazon.com/dp/B0HC7SKYB8

[8] V.-Ș. Constantinescu, *The Romanian Higher Algebra and Analysis Olympiad, Volume 4: Abstract Algebra. Complete Theory and Problems*, Second Edition, 2026. https://www.amazon.com/dp/B0HHNJ2Q4M

[9] V.-Ș. Constantinescu, *L'Olympiade roumaine d'algèbre et d'analyse supérieures, Volume 1 : Analyse de onzième. Théorie complète et problèmes*, deuxième édition, 2026. https://www.amazon.fr/dp/B0HGZRNJJ4

[10] V.-Ș. Constantinescu, *L'Olympiade roumaine d'algèbre et d'analyse supérieures, Volume 2 : Analyse de douzième. Théorie complète et problèmes*, deuxième édition, 2026. https://www.amazon.fr/dp/B0HJZV48LB

[11] V.-Ș. Constantinescu, *L'Olympiade roumaine d'algèbre et d'analyse supérieures, Volume 3 : Algèbre linéaire. Théorie complète et problèmes*, deuxième édition, 2026. https://www.amazon.fr/dp/B0HHHH6X1Q

[12] V.-Ș. Constantinescu, *L'Olympiade roumaine d'algèbre et d'analyse supérieures, Volume 4 : Algèbre abstraite. Théorie complète et problèmes*, deuxième édition, 2026. https://www.amazon.fr/dp/B0HH111QMB

[13] Olympiade nationale roumaine de mathématiques, étape nationale, Piatra-Neamț, 16 avril 2022, classe de XI$^{e}$, solutions et barèmes, SSMR. https://ssmr.ro/files/onm2022/finala/cl11_nationala.pdf

[14] Olympiade roumaine de mathématiques, étape départementale 2026, classe de XI$^{e}$, sujets. https://cdn.edupedu.ro/wp-content/uploads/2026/03/Cl_11_a_subiecte_OJM_2026_RO.pdf

[15] Olympiade roumaine de mathématiques, étape départementale 2026, classe de XI$^{e}$, solutions et barèmes. https://cdn.edupedu.ro/wp-content/uploads/2026/03/Cl_11_a_solutii_bareme_OJM_2026.pdf

[16] Olympiade roumaine de mathématiques, étape départementale 2004, classe de XII$^{e}$, énoncés et solutions (transcrits dans la base de données ROHS de l'auteur).

[17] Olympiade nationale roumaine de mathématiques, étape départementale 2025, classe de XI$^{e}$, solutions, SSMR. http://ssmr.ro/files/onm2025/faza_municipiu/barem_clasa11.pdf

[18] 11th International Mathematics Competition for University Students (IMC), Skopje, 2004, Day 1, Problems and Solutions. https://www.imc-math.org.uk/archive/problems/2004/IMC_2004_Day_1_Problems_and_Solutions.pdf

[19] Gazeta Matematică, n$^{o}$ 6-8/2025, problème proposé.

[20] Olympiade nationale roumaine de mathématiques, 2009, classe de XII$^{e}$, problème 4.

[21] Tournoi des villes, 1990/91, tour d'automne, version de base, classes 10 à 11, problème 4, sur problems.ru, problème 98078. https://problems.ru/view_problem_details_new.php?id=98078

[22] The 64th William Lowell Putnam Mathematical Competition, 2003, problème A2 ; énoncés et solutions dans les archives de K. Kedlaya. https://kskedlaya.org/putnam-archive/2003.tex

[23] 11th International Mathematics Competition for University Students (IMC), Skopje, 2004, Day 2, Problems and Solutions. https://www.imc-math.org.uk/archive/problems/2004/IMC_2004_Day_2_Problems_and_Solutions.pdf

[24] M. Rakovsky, *Progresser en géométrie*, cours de la POFM (Préparation Olympique Française de Mathématiques). https://maths-olympiques.fr/wp-content/uploads/2023/02/cours.pdf

[25] M. Rakovsky, *Progresser en géométrie. Solutions*, POFM. https://maths-olympiques.fr/wp-content/uploads/2023/02/solutions.pdf