Continuitatea dincolo de numerele reale

Vlad-Ștefan Constantinescu

Introducere

La liceu, continuitatea se definește pentru funcții de o variabilă reală: dacă $x_k \to x$, atunci $f(x_k) \to f(x)$. Nu am văzut mulți oameni vorbind despre continuitate în afara celei studiate la clasă, deși ea poate fi foarte utilă la problemele de olimpiadă.

În multe probleme de olimpiadă variabila nu este un număr, ci un obiect mai complicat: o matrice, o funcție, o configurație geometrică. Continuitatea pe care o definim în Secțiunea 2, în raport cu distanța „cea mai mare abatere", este nouă față de materia de clasa a XI-a. Scopul textului este practic: să arate când putem formaliza conceptul de trecere la limită și pentru obiecte care nu sunt numere reale.

Pornim de la trei probleme de concurs ale căror soluții au aceeași structură: proprietatea cerută se demonstrează întâi pe o clasă de obiecte convenabilă, apoi se extinde la toate obiectele prin aproximare. La prima, acesta este chiar drumul soluției oficiale; celelalte două au și soluții fără nicio limită, pe care le semnalăm de la început, dar le păstrăm ca exemple de antrenament. Pe baza lor scriem cadrul general (Secțiunea 2), îl aplicăm la alte probleme de concurs (Secțiunea 3), arătăm unde nu funcționează (Secțiunea 4) și încheiem cu exerciții. Teoria de liceu pe care o folosim (limite, continuitate, mulțimi dense, proprietatea lui Darboux, matrice și valori proprii, polinoame simetrice, integrale) se găsește în volumele mele [1, 2, 3, 4] și în traducerile lor [5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12].

1. Trei probleme

1.1 Problema 1. ONM 2022, clasa a XI-a, problema 4

Enunț. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel ca $A^2 + B^2 = 2AB$. Arătați că

$$\det(A - xI_n) = \det(B - xI_n),$$

pentru orice $x \in \mathbb{C}$.

Sursa: [13]. Soluția de mai jos urmează Soluția 1 din barem; la Pasul 3 dăm și forma cu limită.

Soluție. *Pasul 1: cazul A, B inversabile.* Înmulțind relația la stânga cu A^{-1} și la dreapta cu B^{-1} obținem $AB^{-1} + A^{-1}B = 2I_n$. Cu $X = A^{-1}B$ avem $B = AX$, deci $AB^{-1} = AX^{-1}A^{-1}$, iar relația devine $AX^{-1}A^{-1} = 2I_n - X$. Matricele $2I_n - X$ și X^{-1} sunt deci asemenea și au aceleași valori proprii, cu aceleași multiplicități. Fie $Y = I_n - X$: matricele $I_n + Y$ și $(I_n - Y)^{-1}$ au aceleași valori proprii. Valorile proprii ale lui $(I_n - Y)^{-1}$ sunt numerele $\frac{1}{1-\beta}$, cu β valoare proprie a lui Y. Dacă α este o valoare proprie a lui Y, atunci $1+\alpha$ este valoare proprie a lui $I_n + Y$, deci $1 + \alpha = \frac{1}{1-\beta}$ pentru o valoare proprie β a lui Y; în particular $1 + \alpha \neq 0$ și $\beta = \frac{\alpha}{1+\alpha}$. Aplicând repetat această observație, prin inducție, toate numerele $\frac{\alpha}{1+k\alpha}$, $k \in \mathbb{N}$, sunt valori proprii ale lui

Y. Dacă $\alpha \neq 0$, ele sunt distincte două câte două, iar Y ar avea o infinitate de valori proprii, absurd. Deci toate valorile proprii ale lui Y sunt 0, toate valorile proprii ale lui $X = I_n - Y$ sunt 1, $\det X = 1$ și $\det B = \det A \cdot \det X = \det A$.

Pasul 2: noțiunile folosite. Trecem acum de la perechile inversabile la toate perechile, printr-o limită. Definim întâi, de la zero, fiecare noțiune de care avem nevoie.

Definiția 1. Un *șir de perechi de matrice* este o regulă care asociază fiecărui număr natural $k \geq 1$ o pereche (P_k, Q_k) de matrice din $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. O pereche este descrisă de $2n^2$ numere: elementele lui P_k și ale lui Q_k. Șirul *converge* la perechea (P, Q), și scriem $(P_k, Q_k) \to (P, Q)$, dacă fiecare dintre aceste $2n^2$ numere converge la numărul de pe aceeași poziție din P, respectiv din Q.

Definiția 2. Fie $\mathcal{H}$ o clasă de perechi de matrice și $\mathcal{H}^*$ o parte a ei. Spunem că $\mathcal{H}^*$ este *densă* în $\mathcal{H}$ dacă orice pereche din $\mathcal{H}$ este limita unui șir de perechi din $\mathcal{H}^*$.

Definiția 3. O *mărime* pe $\mathcal{H}$ este o regulă Φ care asociază fiecărei perechi din $\mathcal{H}$ un număr complex. Ea este *continuă* pe $\mathcal{H}$ dacă, ori de câte ori $(P_k, Q_k) \to (P, Q)$, cu toate perechile în $\mathcal{H}$, avem $\Phi(P_k, Q_k) \to \Phi(P, Q)$.

Fie

$$\mathcal{H} = \{(P, Q) : \ P^2 + Q^2 = 2PQ\}$$

clasa perechilor care verifică ipoteza și $\mathcal{H}^* \subseteq \mathcal{H}$ clasa celor în care P și Q sunt inversabile. Pasul 1 spune că $\det P = \det Q$ pentru orice $(P, Q) \in \mathcal{H}^*$.

Ipoteza se păstrează când translatăm ambele matrice cu același multiplu al lui I_n: pentru $(P, Q) \in \mathcal{H}$ și $c \in \mathbb{C}$, prin desfacerea parantezelor,

$$(P - cI_n)^2 + (Q - cI_n)^2 = P^2 + Q^2 - 2c(P + Q) + 2c^2 I_n = 2(P - cI_n)(Q - cI_n),$$

deci $(P - cI_n, Q - cI_n) \in \mathcal{H}$.

Lema 1. *Clasa $\mathcal{H}^*$ este densă în $\mathcal{H}$, adică orice pereche din $\mathcal{H}$ este limita unui șir de perechi din $\mathcal{H}^*$.*

Demonstrație. Fie $(P, Q) \in \mathcal{H}$. Construim un șir de perechi din $\mathcal{H}^*$ care converge la (P, Q), în trei pași.

(i) Alegerea numerelor c_k. Fie V mulțimea valorilor proprii ale lui P și ale lui Q. Valorile proprii ale lui P sunt rădăcinile polinomului $\det(P - cI_n)$, de grad n în c, deci sunt cel mult n; la fel pentru Q. Așadar V are cel mult $2n$ elemente. Fiecare element al lui V este egal cu $\frac{1}{k}$ pentru cel mult un k, deci doar un număr finit de indici k au $\frac{1}{k} \in V$. Renunțând la ei, obținem un șir $c_k \to 0$ cu $c_k \notin V$ pentru orice k.

(ii) Perechile $(P - c_k I_n, Q - c_k I_n)$ sunt în $\mathcal{H}^*$. Cum c_k nu este valoare proprie a lui P, avem $\det(P - c_k I_n) \neq 0$, deci $P - c_k I_n$ este inversabilă; la fel $Q - c_k I_n$. Din calculul de mai sus, cu $c = c_k$, perechea verifică relația din $\mathcal{H}$. Deci este în $\mathcal{H}^*$.

(iii) Convergența. Matricea $P - c_k I_n$ are, în afara diagonalei, aceleași elemente ca P: acestea formează șiruri constante, care converg la elementele lui P. Pe diagonală are $p_{ii} - c_k$, iar $p_{ii} - c_k \to p_{ii}$ pentru că $c_k \to 0$. La fel pentru $Q - c_k I_n$. Toate cele $2n^2$ șiruri de numere converg, deci $(P - c_k I_n, Q - c_k I_n) \to (P, Q)$ (Definiția 1). □

Pasul 3: extinderea. Fie $\Phi(P, Q) = \det P - \det Q$.

(i) Φ este continuă pe $\mathcal{H}$. Fie $(P_k, Q_k) \to (P, Q)$. Din definiția determinantului,

$$\det P_k = \sum_\sigma \varepsilon(\sigma)\, p^{(k)}_{1\sigma(1)}\, p^{(k)}_{2\sigma(2)} \cdots p^{(k)}_{n\sigma(n)},$$

unde suma este după cele $n!$ permutări σ ale mulțimii $\{1,\dots,n\}$, iar $\varepsilon(\sigma)=\pm1$ este semnul permutării. Fiecare factor $p^{(k)}_{i\sigma(i)}$ este un șir de numere care converge la $p_{i\sigma(i)}$ (Definiția 1). Produsul a n șiruri convergente converge la produsul limitelor, iar o sumă finită de șiruri convergente converge la suma limitelor. Deci $\det P_k \to \det P$; la fel $\det Q_k \to \det Q$, iar diferența lor converge la diferența limitelor: $\Phi(P_k,Q_k)\to\Phi(P,Q)$.

(ii) Φ *este nulă pe* $\mathcal{H}^*$. Este exact Pasul 1: pentru $(P,Q)\in\mathcal{H}^*$, $\det P=\det Q$.

(iii) Φ *este nulă pe tot* $\mathcal{H}$. Fie $(P,Q)\in\mathcal{H}$ și (P_k,Q_k) șirul din Lema 1. Din (ii), $\Phi(P_k,Q_k)=0$ pentru orice k, deci șirul $\Phi(P_k,Q_k)$ este constant egal cu 0 și are limita 0. Din (i), aceeași limită este $\Phi(P,Q)$. Cum un șir de numere are o singură limită, $\Phi(P,Q)=0$. (În limbajul Secțiunii 2, este Teorema 1 a) aplicată clasei $\mathcal{H}$ și clasei dense $\mathcal{H}^*$.)

(iv) Concluzia. Fie $x\in\mathbb{C}$. Perechea (A,B) este în $\mathcal{H}$, deci, din calculul de la Pasul 2 cu $c=x$, și perechea $(A-xI_n,B-xI_n)$ este în $\mathcal{H}$. Din (iii), $\Phi(A-xI_n,B-xI_n)=0$, adică $\det(A-xI_n)=\det(B-xI_n)$. □

> *Observație.* Baremul încheie algebric: $\det(A-xI_n)-\det(B-xI_n)$ este un polinom în x care se anulează în toate punctele x ce nu sunt valori proprii, deci este polinomul nul. Baremul conține și o a doua soluție, pur algebrică, prin ranguri. Punctul esențial al soluției de mai sus este că aproximarea se face *în interiorul clasei ipotezei*: perechile aproximante verifică și ele $P^2+Q^2=2PQ$, deci știm ceva despre ele. Nu ar ajunge ca perechile inversabile să fie dense în mulțimea tuturor perechilor. În Secțiunea 4 vedem o problemă în care tocmai această condiție lipsește.

1.2 Problema 2. OJM 2026, clasa a XI-a, problema 3

Enunț. Fie $n\geq 2$. Determinați matricele $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cu proprietatea: dacă $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ și $AB=M$, atunci $BA=M$.

Răspuns. $M=\lambda I_n$ cu $\lambda\in\mathbb{C}^*$.

Sursa: [14, 15]. Spunem de la început că baremul oficial nu folosește nicio limită: după Pasul 1 de mai jos, el aplică direct matricele inversabile I_n+E_{1j}. Păstrăm problema ca exemplu de antrenament.

Notă personală. Am participat la OJM 2026, iar soluția de mai jos este prima pe care am găsit-o în concurs. Nu am redactat-o pe aceasta, apreciind că un argument cu limite riscă să nu fie acceptat ca complet.

Soluție. Notăm cu $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ mulțimea matricelor inversabile. Soluția trece la limită într-un șir de matrice. Noțiunile sunt cele de la Problema 1, scrise acum pentru o singură matrice; le dăm din nou, de la zero.

> **Definiția 4.** Un *șir de matrice* este o regulă care asociază fiecărui număr natural $k\geq 1$ o matrice $X_k\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Notăm elementele lui X_k cu $x^{(k)}_{ij}$. Pentru fiecare poziție (i,j) fixată obținem astfel un șir obișnuit de numere complexe, $\left(x^{(k)}_{ij}\right)_{k\geq1}$.

> **Definiția 5.** Șirul de matrice (X_k) *converge* la matricea $X=(x_{ij})$, și scriem $X_k\to X$, dacă pentru fiecare poziție (i,j) avem $x^{(k)}_{ij}\to x_{ij}$, adică $\left|x^{(k)}_{ij}-x_{ij}\right|\to 0$. Echivalent, cum pozițiile sunt în număr finit, cea mai mare abatere $\max_{i,j}\left|x^{(k)}_{ij}-x_{ij}\right|$ tinde la 0.

> **Lema 2.** *Fie $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ fixată. Mărimea $X\mapsto MX-XM$ este continuă, adică: dacă $X_k\to X$, atunci $MX_k-X_kM\to MX-XM$. În particular, dacă $MX_k-X_kM=O_n$ pentru orice k, atunci $MX-XM=O_n$.*

Demonstrație. Elementul de pe poziția (i,j) al matricei $MX_k - X_kM$ este

$$\sum_{l=1}^{n} m_{il}\, x_{lj}^{(k)} - \sum_{l=1}^{n} x_{il}^{(k)}\, m_{lj},$$

o combinație liniară, cu coeficienți ficși, a unui număr finit de elemente ale lui X_k. Din regulile de calcul cu limite de șiruri de numere, ea tinde la elementul corespunzător al lui $MX - XM$. Dacă toate matricele $MX_k - X_kM$ sunt nule, fiecare dintre aceste șiruri de numere este constant egal cu 0, deci limita lui este 0. □

Pasul 1: M comută cu orice matrice inversabilă. Pentru $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, luăm $A = MC$, $B = C^{-1}$: $AB = M$, deci $BA = C^{-1}MC = M$, adică $MC = CM$.

Pasul 2: aproximarea oricărei matrice.

> **Lema 3.** *Mulțimea $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ este densă în $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, adică pentru orice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ există un șir de matrice inversabile X_k cu $X_k \to X$.*

Demonstrație. Funcția $p(t) = \det(X + tI_n)$ este un polinom în t de grad n cu coeficientul dominant 1, deci are cel mult n rădăcini. Fiecare rădăcină este egală cu $\frac{1}{k}$ pentru cel mult un k; renunțând la acești indici, în număr finit, obținem un șir $t_k \to 0$ cu $p(t_k) \neq 0$ pentru orice k. Matricele $X_k = X + t_kI_n$ au determinantul $p(t_k) \neq 0$, deci sunt inversabile. În afara diagonalei, elementele lui X_k sunt cele ale lui X (șiruri constante); pe diagonală sunt $x_{ii} + t_k \to x_{ii}$. Deci $X_k \to X$ (Definiția 5). □

Fie $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ oarecare și X_k șirul de matrice inversabile din Lema 3, cu $X_k \to X$. Din Pasul 1, aplicat matricei inversabile X_k, avem $MX_k - X_kM = O_n$ pentru orice k. Din Lema 2, $MX_k - X_kM \to MX - XM$; un șir constant egal cu O_n are limita O_n, deci $MX - XM = O_n$, adică $MX = XM$. Cum X a fost oarecare, M comută cu orice matrice.

Pasul 3: M este scalară. Fie E_{ij} matricea cu 1 pe poziția (i,j) și 0 în rest. Coloana j a lui ME_{ij} este coloana i a lui M, celelalte coloane fiind nule; coloana j a lui $E_{ij}M$ are pe poziția i elementul m_{jj} și în rest 0. Din $ME_{ij} = E_{ij}M$, cu $j \neq i$, rezultă $m_{ki} = 0$ pentru $k \neq i$ și $m_{ii} = m_{jj}$. Deci $M = \lambda I_n$.

Pasul 4: verificare. Pentru $\lambda = 0$ proprietatea nu are loc: $A = E_{12}$, $B = E_{11}$ dau $AB = O_n$ și $BA = E_{12} \neq O_n$ (aici se folosește $n \geq 2$). Pentru $\lambda \neq 0$, din $AB = \lambda I_n$ rezultă $\det A \det B = \lambda^n \neq 0$, deci $B = \lambda A^{-1}$ și $BA = \lambda I_n$. □

> *Observație.* Aici $MX - XM$ nu se schimbă când X este înlocuit cu $X + tI_n$, așa că limita se poate evita. Forma cu limită arată însă mecanismul general, care funcționează și când nu există o asemenea simplificare.

1.3 Problema 3. OJM 2004, clasa a XII-a, problema 2

Enunț. Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continuă cu proprietatea că

$$\int_0^1 f(x)g(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx \cdot \int_0^1 g(x)\,dx$$

pentru orice funcție $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ continuă și nederivabilă. Arătați că f este constantă.

Sursa: [16]. Spunem de la început că limita se poate evita complet (Observația de după soluție), iar soluția oficială folosește o funcție test localizată, fără nicio limită.

Notă personală. Am întâlnit problema în timp ce lucram la scara de dificultate ROHS (o scară de la 0 la 50 pe care o construiesc pentru problemele de la OJM și ONM, separat pe fiecare clasă). Soluția mea de mai jos o estimez la 20 la 25 pe scara ROHS; soluția oficială este mai ușoară.

Soluție. Și aici soluția trece la limită, de data aceasta într-un șir de funcții. Definim întâi noțiunile (vezi și [2]).

Definiția 6. Un *șir de funcții continue* este o regulă care asociază fiecărui număr natural $k \geq 1$ o funcție continuă $g_k : [0,1] \to \mathbb{R}$. Pentru fiecare $x \in [0,1]$ fixat obținem un șir obișnuit de numere, $\big(g_k(x)\big)_{k\geq 1}$.

Definiția 7. Pentru $g_1, g_2 : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue, numim *distanța* dintre ele cea mai mare abatere dintre valorile lor,

$$d(g_1, g_2) = \max_{x\in[0,1]} |g_1(x) - g_2(x)|$$

(maximul există, fiind maximul unei funcții continue pe un interval închis). Șirul (g_k) *converge uniform* la g, și scriem $g_k \to g$, dacă $d(g_k, g) \to 0$.

Nu ajunge ca $g_k(x) \to g(x)$ pentru fiecare x în parte; cerem ca abaterea să devină mică *simultan* în toate punctele. De ce este necesară această cerință se vede în Secțiunea 2.2.

Fie $c = \int_0^1 f$, $\varphi = f - c$ și $L(g) = \int_0^1 \varphi g$, pentru g continuă. Pentru g continuă și nederivabilă, $L(g) = \int_0^1 fg - c\int_0^1 g = 0$.

Pasul 1: L se comportă bine la limită.

Lema 4. *Mărimea L este continuă față de convergența uniformă, adică: dacă $g_k \to g$ uniform, atunci $L(g_k) \to L(g)$.*

Demonstrație. Pentru g_1, g_2 continue, $|\varphi(x)\big(g_1(x) - g_2(x)\big)| \leq |\varphi(x)|\, d(g_1, g_2)$ pentru orice x, deci, integrând,

$$|L(g_1) - L(g_2)| \leq \int_0^1 |\varphi| \cdot d(g_1, g_2).$$

Cu $g_1 = g_k$ și $g_2 = g$, membrul drept tinde la 0. □

Pasul 2: aproximarea oricărei funcții continue.

Lema 5. *Funcțiile continue nederivabile formează o clasă densă în clasa funcțiilor continue pe $[0,1]$, adică orice $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ continuă este limita uniformă a unui șir de funcții continue nederivabile.*

Demonstrație. Fie $\tau(x) = |x - \frac{1}{2}|$, continuă, nederivabilă în $\frac{1}{2}$, cu $\max|\tau| = \frac{1}{2}$. Funcția $g + \varepsilon\tau$ este nederivabilă în $\frac{1}{2}$ pentru toate valorile reale ε, cu excepția a cel mult uneia: dacă $g + \varepsilon_1\tau$ și $g + \varepsilon_2\tau$, cu $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$, ar fi derivabile în $\frac{1}{2}$, atunci și $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\tau$ ar fi derivabilă în $\frac{1}{2}$, fals. Alegem $\varepsilon_k \to 0$ evitând această valoare; funcțiile $g_k = g + \varepsilon_k\tau$ sunt continue, nederivabile, iar $d(g_k, g) = \frac{|\varepsilon_k|}{2} \to 0$. □

Pasul 3: concluzia. Fie g continuă oarecare și g_k șirul de funcții continue nederivabile din Lema 5, cu $g_k \to g$ uniform. Fiecare g_k este nederivabilă, deci $L(g_k) = 0$: șirul $L(g_k)$ este constant egal cu 0. Din Lema 4, $L(g_k) \to L(g)$, deci $L(g) = 0$. Pentru $g = \varphi$ obținem $\int_0^1 \varphi^2 = 0$. Funcția φ^2 este continuă și nenegativă; dacă $\varphi(x_0) \neq 0$, atunci $\varphi^2 > \frac{1}{2}\varphi^2(x_0)$ pe un interval în jurul lui x_0 și integrala ar fi pozitivă. Deci $\varphi \equiv 0$ și $f \equiv c$. □

Observație (L este nulă în două rânduri). Dacă g este continuă și derivabilă în orice punct din $[0,1]$, atunci $g+\tau$ este nederivabilă în $\frac{1}{2}$, deci $L(g) = L(g+\tau) - L(\tau) = 0$. Orice funcție continuă este fie nederivabilă undeva (și atunci ipoteza dă direct $L(g) = 0$), fie derivabilă peste tot (și atunci tocmai am văzut că $L(g) = 0$). Așadar L este identic nulă fără nicio limită, iar Lemele 4 și 5 nu sunt necesare. Am păstrat totuși soluția cu aproximare, pentru că arată mecanismul în forma cea mai curată.

1.4 De la trei probleme la o generalizare

Din aceste trei probleme ne vine ideea să generalizăm în felul următor. Toate trei soluțiile au aceiași trei pași.

1. Proprietatea se demonstrează pe o clasă particulară de obiecte: perechile de matrice inversabile din $\mathcal{H}$; matricele inversabile; funcțiile nederivabile.
2. Se arată că orice obiect poate fi aproximat oricât de bine cu obiecte din acea clasă (Lemele 1, 3 și 5).
3. Mărimea care exprimă proprietatea ($\det P - \det Q$, $MX - XM$, respectiv $L(g)$) se comportă bine la limită (Pasul 3 al Problemei 1, Lemele 2 și 4), deci proprietatea trece de la obiectele aproximante la obiectul aproximat.

Mai mult, definițiile convergenței au aceeași formă. O pereche de matrice este descrisă de cele $2n^2$ elemente ale ei, o matrice de numerele x_{ij}, o funcție de numerele $g(x)$, iar în toate cazurile un șir converge când *cea mai mare abatere dintre numerele corespunzătoare* tinde la 0 (Definițiile 1, 5 și 7). Singura diferență este că o pereche de matrice sau o matrice sunt descrise de un număr finit de numere, iar o funcție de o infinitate.

Generalizăm deci astfel: orice obiect (matrice, funcție, triunghi, dreaptă) este descris de o listă de numere, parametrii săi; distanța dintre două obiecte este cea mai mare abatere dintre parametrii corespunzători; o mărime asociată obiectelor este continuă dacă se schimbă puțin când parametrii se schimbă puțin. În secțiunea următoare dezvoltăm acest cadru și arătăm că cei trei pași de mai sus devin o singură teoremă.

2. Teoria

2.1 Obiecte descrise prin parametri

Definiția 8. Fie I o mulțime nevidă (mulțimea indicilor). Un *obiect cu parametri indexați de* I este o funcție $X : I \to \mathbb{C}$; numerele $X(i)$, $i \in I$, se numesc *parametrii* lui X. În multe aplicații parametrii sunt reali.

Cu alte cuvinte, un obiect este dat de lista parametrilor săi, câte unul pentru fiecare indice $i \in I$, și îl identificăm cu această listă. Lista poate fi finită sau infinită (la funcții are câte un termen pentru fiecare număr din $[0,1]$).

Exemplu. a) *Matrice.* O matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ este obiectul cu $I = \{1,\dots,n\}^2$. Funcția este

$$A : \{1,\dots,n\}^2 \to \mathbb{C}, \qquad A(i,j) = a_{ij},$$

deci matricea are n^2 parametri, elementele ei. Cu distanța din Secțiunea 2.2, două

matrice sunt apropiate când toate elementele lor corespunzătoare sunt apropiate. De exemplu, pentru

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2{,}1 \\ 3 & 3{,}95 \end{pmatrix},$$

funcțiile sunt $A(1,1) = 1$, $A(1,2) = 2$, $A(2,1) = 3$, $A(2,2) = 4$ și $B(1,1) = 1$, $B(1,2) = 2{,}1$, $B(2,1) = 3$, $B(2,2) = 3{,}95$. Abaterile sunt 0, 0,1, 0 și 0,05, deci distanța dintre A și B este 0,1. La fel, o *pereche* de matrice (P, Q) din Problema 1 este obiectul cu $I = \{1,2\} \times \{1,\dots,n\}^2$ și $2n^2$ parametri; funcția este $(1,i,j) \mapsto p_{ij}$, $(2,i,j) \mapsto q_{ij}$.

b) *Triunghi.* Un triunghi ABC din plan este obiectul cu $I = \{1,\dots,6\}$, parametrii fiind coordonatele vârfurilor. Funcția este $X : \{1,\dots,6\} \to \mathbb{R}$,

$$X(1) = x_A, \quad X(2) = y_A, \quad X(3) = x_B, \quad X(4) = y_B, \quad X(5) = x_C, \quad X(6) = y_C.$$

Nu orice funcție de acest fel este un triunghi: cerem ca A, B, C să nu fie coliniare, deci clasa triunghiurilor este o parte a tuturor listelor de șase numere. Două triunghiuri sunt la distanță cel mult δ când fiecare vârf al unuia se obține din vârful corespunzător al celuilalt mutând fiecare coordonată cu cel mult δ. De exemplu, triunghiul cu vârfurile $(0,0)$, $(4,0)$, $(0,3)$ este funcția cu valorile $0,0,4,0,0,3$, iar cel cu vârfurile $(0;0{,}01)$, $(4,0)$, $(0;2{,}98)$ este funcția cu valorile 0; 0,01; 4; 0; 0; 2,98. Abaterile sunt 0, 0,01, 0, 0, 0, 0,02, deci cele două triunghiuri sunt la distanță 0,02.

c) *Polinom.* Un polinom $a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$ de grad cel mult n este obiectul cu $I = \{0,\dots,n\}$, parametrii fiind coeficienții. Funcția este

$$\{0,\dots,n\} \to \mathbb{C}, \qquad k \mapsto a_k.$$

De exemplu, pentru $n = 2$, polinomul $X^2 + 1$ este funcția $0 \mapsto 1$, $1 \mapsto 0$, $2 \mapsto 1$, iar $X^2 + 0{,}01X + 1$ este funcția $0 \mapsto 1$, $1 \mapsto 0{,}01$, $2 \mapsto 1$; ele diferă doar la indicele 1, deci sunt la distanță 0,01. Dacă două polinoame de grad cel mult n sunt la distanță δ, atunci pentru $|x| \le 1$ valorile lor diferă cu cel mult $(n+1)\delta$, pentru că fiecare dintre cei $n+1$ termeni diferă cu cel mult δ.

d) *Funcție.* O funcție $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ este obiectul cu $I = [0,1]$. Aici funcția din Definiția 8 este chiar g: parametrul de indice x este valoarea $g(x)$, câte unul pentru fiecare număr x din $[0,1]$, deci o infinitate de parametri. Distanța dintre g și h este cea mai mare valoare a lui $|g(x) - h(x)|$; ea este cel mult δ exact când graficul lui h stă în banda de lățime 2δ din jurul graficului lui g. De exemplu, $g(x) = x$ și $h(x) = x + 0{,}01\sin(10x)$ sunt la distanță cel mult 0,01. Acesta este obiectul din Problema 3.

e) *Dreaptă.* Orice dreaptă are o ecuație $ax + by + c = 0$, cu $(a,b) \neq (0,0)$. Împărțind-o la $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ și alegând unghiul θ cu $\cos\theta = \frac{a}{r}$, $\sin\theta = \frac{b}{r}$, ea devine

$$x\cos\theta + y\sin\theta = p, \qquad p = -\frac{c}{r},$$

unde $(\cos\theta, \sin\theta)$ este un vector de lungime 1 perpendicular pe dreaptă, iar $|p|$ este distanța de la origine la dreaptă. Forma aceasta acoperă și dreptele verticale: $x = 1$ se obține pentru $\theta = 0$, $p = 1$. Dreapta este deci obiectul cu doi parametri (θ, p); funcția este $X : \{1,2\} \to \mathbb{R}$, $X(1) = \theta$, $X(2) = p$. Aceeași dreaptă are mai multe perechi: (θ, p), $(\theta + 2\pi, p)$ și $(\theta + \pi, -p)$ dau aceeași mulțime de puncte. Lucrăm cu perechea, adică cu ecuația, nu cu mulțimea de puncte.

f) *Configurație.* În Exercițiul 4 o configurație geometrică (un trapez și două puncte pe laturi) va fi obiectul cu șase parametri a, b, c, η, s, t; funcția este $X : \{1, \dots, 6\} \to \mathbb{R}$, cu $X(1) = a$, $X(2) = b$, $X(3) = c$, $X(4) = \eta$, $X(5) = s$, $X(6) = t$. În toate cazurile, „obiecte apropiate" înseamnă „toți parametrii sunt apropiați".

2.2 Distanță și limită

Definiția 9. Distanța dintre două obiecte X, Y cu parametri indexați de aceeași mulțime I este

$$d(X, Y) = \sup_{i \in I} |X(i) - Y(i)| \in [0, +\infty],$$

adică cea mai mare abatere dintre parametrii corespunzători. Un șir de obiecte $(X_k)_{k \geq 1}$ *converge* la obiectul X, și scriem $X_k \to X$, dacă $d(X_k, X) \to 0$ (în particular, $d(X_k, X)$ este finită de la un rang încolo).

Când I este finită, supremumul este un maxim, deci un număr. Când I este infinită, supremumul poate fi $+\infty$ (de exemplu, pentru o funcție nemărginită și funcția nulă); acceptăm această valoare. Pentru funcțiile continue pe $[0, 1]$ supremumul este un maxim, deci regăsim Definiția 7.

Propoziția 1. *Dacă I este finită, atunci $X_k \to X$ dacă și numai dacă $X_k(i) \to X(i)$ pentru fiecare $i \in I$.*

Demonstrație. Pentru fiecare i, $|X_k(i) - X(i)| \leq d(X_k, X)$, deci convergența obiectelor implică convergența fiecărui parametru. Reciproc, dacă fiecare dintre parametrii, în număr finit, converge, atunci maximul celor $|I|$ abateri tinde la 0. □

Așadar, pentru matrice, triunghiuri sau polinoame, limita unui șir de obiecte se calculează parametru cu parametru. Pentru funcții, unde $I = [0, 1]$ este infinită, definiția cere mai mult: abaterea trebuie să tindă la 0 *simultan* în toate punctele. Aceasta este convergența uniformă; observația de mai jos arată de ce este alegerea potrivită.

Observație (de ce nu parametru cu parametru). Pentru o infinitate de parametri, convergența fiecărui parametru (*convergența punctuală*: $g_k(x) \to g(x)$ pentru fiecare x) este prea slabă. Fie, pentru $k \geq 2$,

$$g_k(x) = \begin{cases} k^2 x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{k}, \\ 2k - k^2 x, & \frac{1}{k} \leq x \leq \frac{2}{k}, \\ 0, & \frac{2}{k} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Pentru fiecare x fixat, $g_k(x) \to 0$: $g_k(0) = 0$, iar pentru $x > 0$ avem $g_k(x) = 0$ de îndată ce $\frac{2}{k} < x$. Totuși $\int_0^1 g_k = 1$ pentru orice k, în timp ce integrala limitei este 0. Deci integrala, mărimea care ne interesează, nu ar fi continuă față de convergența punctuală. Față de convergența uniformă, ea este continuă (Lema 4).

2.3 Mărimi continue

Definiția 10. Fie $\mathcal{O}$ o clasă de obiecte cu parametri indexați de I și $\Phi : \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ o funcție (o *mărime* asociată obiectelor). Spunem că Φ este *continuă în obiectul $X \in \mathcal{O}$* dacă, pentru orice șir (X_k) de obiecte din $\mathcal{O}$ cu $X_k \to X$, avem $\Phi(X_k) \to \Phi(X)$. Mărimea Φ este *continuă*

pe $\mathcal{O}$ dacă este continuă în fiecare obiect din $\mathcal{O}$.

Este exact definiția de la liceu din introducere: dacă parametrii lui X_k se apropie de parametrii lui X, atunci $\Phi(X_k)$ se apropie de $\Phi(X)$. Pentru o funcție de o variabilă (I cu un singur element) regăsim definiția obișnuită. (Ca la funcțiile de o variabilă, se poate arăta că definiția este echivalentă cu forma cu ε și δ; nu vom avea nevoie de această echivalență.)

Propoziția 2. *a) Fiecare parametru* $X \mapsto X(i)$ *este o mărime continuă.*

b) Sumele, produsele și câturile (cu numitorul nenul pe $\mathcal{O}$*) de mărimi continue sunt continue, iar dacă* Φ *este continuă, atunci și* $|\Phi|$ *este continuă. Dacă* Φ *este continuă cu valori reale, toate valorile ei sunt într-un interval* J*, iar* $\omega : J \to \mathbb{R}$ *este continuă, atunci* $\omega \circ \Phi$ *este continuă.*

c) În consecință, orice expresie polinomială într-un număr finit de parametri este o mărime continuă.

Demonstrație. a) $|X_k(i) - X(i)| \le d(X_k, X) \to 0$. b) Fie $X_k \to X$ în $\mathcal{O}$. Atunci $\Phi(X_k) \to \Phi(X)$ și $\Psi(X_k) \to \Psi(X)$ pentru mărimile continue Φ, Ψ, iar regulile de calcul cu limite de șiruri dau concluzia pentru sume, produse și câturi. Pentru modul, $\big||\Phi(X_k)| - |\Phi(X)|\big| \le |\Phi(X_k) - \Phi(X)|$. Pentru compunere, numerele $\Phi(X_k)$ sunt în J și tind la $\Phi(X) \in J$, iar ω este continuă în $\Phi(X)$, deci $\omega(\Phi(X_k)) \to \omega(\Phi(X))$ (caracterizarea cu șiruri a continuității funcțiilor de o variabilă). c) Din a) și b). □

Varianta din b) cu un interval J oarecare contează: ea acoperă $\sqrt{\cdot}$ (definit pe $[0, +\infty)$), arccos și arcsin (definite pe $[-1, 1]$).

Propoziția 3 (stabilitatea inegalităților stricte)**.** *Fie* $\Phi : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ *continuă în* $X \in \mathcal{O}$*, cu* $\Phi(X) > 0$*. Atunci există* $\delta > 0$ *astfel încât* $\Phi(Y) > 0$ *pentru orice* $Y \in \mathcal{O}$ *cu* $d(Y, X) < \delta$*.*

Demonstrație. Presupunem contrariul: pentru fiecare $k \ge 1$ există $Y_k \in \mathcal{O}$ cu $d(Y_k, X) < \frac{1}{k}$ și $\Phi(Y_k) \le 0$. Atunci $Y_k \to X$, deci $\Phi(Y_k) \to \Phi(X)$; inegalitatea nestrictă se păstrează la limită, deci $\Phi(X) \le 0$, contradicție. □

Aplicată lui $-\Phi$, respectiv lui $|\Phi|$, propoziția spune același lucru pentru $\Phi(X) < 0$, respectiv $\Phi(X) \neq 0$. Intuitiv: o inegalitate strictă între mărimi continue rămâne adevărată la perturbări mici ale parametrilor.

2.4 Clase dense și principiul extinderii

Definiția 11. O subclasă $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{O}$ este *densă* în $\mathcal{O}$ dacă orice obiect din $\mathcal{O}$ este limita unui șir de obiecte din $\mathcal{D}$.

Teorema 1 (principiul extinderii)**.** *Fie* $\Phi, \Psi : \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ *mărimi continue și* $\mathcal{D}$ *densă în* $\mathcal{O}$*.*

a) Dacă $\Phi = \Psi$ *pe* $\mathcal{D}$*, atunci* $\Phi = \Psi$ *pe* $\mathcal{O}$*.*

b) Dacă Φ, Ψ *au valori reale și* $\Phi \le \Psi$ *pe* $\mathcal{D}$*, atunci* $\Phi \le \Psi$ *pe* $\mathcal{O}$*.*

Demonstrație. Fie $X \in \mathcal{O}$ și $X_k \in \mathcal{D}$ cu $X_k \to X$. Din Definiția 10, $\Phi(X_k) \to \Phi(X)$ și $\Psi(X_k) \to \Psi(X)$. a) $\Phi(X_k) = \Psi(X_k)$ pentru orice k; trecând la limită, $\Phi(X) = \Psi(X)$. b) Analog, inegalitatea nestrictă se păstrează la limită. □

Pentru funcții de o variabilă reală, partea a) este „principiul densității” din [1].

Clasa ipotezei. În Teorema 1, $\mathcal{O}$ este clasa pe care știm că Φ și Ψ sunt definite și continue, iar $\mathcal{D}$ trebuie să fie densă chiar în $\mathcal{O}$. Dacă problema dă o ipoteză care definește o clasă mai mică (de exemplu, perechile (A, B) cu $A^2 + B^2 = 2AB$), atunci contează densitatea în acea clasă, nu în spațiul tuturor obiectelor: aproximantele trebuie să verifice și ele ipoteza. În Problema 1 translația cu xI_n păstrează ipoteza; în Problema 2 ipoteza privește matricea fixă M, iar matricele X care se aproximează nu trebuie să verifice nimic. În Secțiunea 4.1 vedem o problemă de olimpiadă în care această condiție lipsește și concluzia nu se mai extinde.

Strategia. Pentru o problemă care cere o proprietate pentru toate obiectele:

1. se scrie proprietatea ca egalitate (sau inegalitate nestrictă) între mărimi continue;
2. se găsește o clasă densă pe care proprietatea este ușor de demonstrat;
3. se aplică Teorema 1.

Inegalitatea strictă nu se păstrează la limită: dacă $\Phi < \Psi$ pe $\mathcal{D}$, se obține doar $\Phi \leq \Psi$ pe $\mathcal{O}$.

Lista de verificări. Ca să putem spune „prin continuitate”, trebuie precizate:

(a) obiectele și parametrii lor (ce variază și ce rămâne fix);

(b) că mărimile folosite sunt definite și continue pe *întreaga* clasă $\mathcal{O}$ (numitorii nu se anulează, radicalii și arccos primesc argumente din domeniul lor);

(c) o mărime continuă care exprimă concluzia și o clasă densă chiar în clasa pe care are loc ipoteza;

(d) că dintr-o egalitate (sau inegalitate) între mărimi se poate reveni la proprietatea cerută.

2.5 Problemele revăzute

Problema 1. Obiectul este perechea (P, Q), cu $2n^2$ parametri, elementele celor două matrice; din Propoziția 1, convergența din Definiția 1 este exact limita din Definiția 9. Mărimea $\Phi(P, Q) = \det P - \det Q$ este polinomială în parametri, deci continuă (Propoziția 2), iar Lema 1 spune că $\mathcal{H}^*$ este densă în $\mathcal{H}$. Teorema 1 a), aplicată clasei $\mathcal{H}$, este Pasul 3.

Problema 2. Din Propoziția 1, limita unui șir de matrice în sensul Definiției 5 (element cu element) este exact limita din Definiția 9. Lema 3 spune că $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ este densă în $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Elementele lui $X \mapsto MX - XM$ sunt mărimi continue (Propoziția 2), nule pe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$; Teorema 1 dă Pasul 2 al soluției.

Același mecanism dă rezultate clasice. De exemplu, pentru orice $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, matricele AB și BA au același polinom caracteristic: dacă A este inversabilă, $\det(tI_n - BA) = \det\big(A^{-1}(tI_n - AB)A\big) = \det(tI_n - AB)$; cu B și t fixate, ambii membri sunt polinomiali în elementele lui A, deci continui, și egali pe clasa densă $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Problema 3. Pentru funcții continue, limita din Definiția 9 este convergența uniformă din Definiția 7. Lema 4 spune exact că L este o mărime continuă pe clasa funcțiilor continue pe $[0, 1]$, Lema 5 spune că funcțiile nederivabile formează o clasă densă, iar Teorema 1 dă din nou concluzia.

2.6 Triunghiuri

Fie $\mathcal{O}$ clasa triunghiurilor nedegenerate, fiecare dat prin cele șase coordonate ale vârfurilor. Din Propoziția 1, un șir de triunghiuri $A_kB_kC_k$ converge la ABC dacă și numai dacă $A_k \to A$, $B_k \to B$, $C_k \to C$ (coordonată cu coordonată). Folosim această clasă în exercițiul despre triunghiurile scalene, de la finalul textului.

2.7 Familii continue și proprietatea lui Darboux

În multe probleme obiectele nu apar ca șir, ci ca familie care depinde de un număr real: tangentele la un cerc, dreptele care se rotesc în jurul unui punct, punctele care se deplasează pe segmente.

Definiția 12. Fie $J \subseteq \mathbb{R}$ un interval și $\mathcal{O}$ o clasă de obiecte cu parametri indexați de o mulțime finită I. O *familie continuă* de obiecte este o funcție $t \mapsto X_t$, $J \to \mathcal{O}$, pentru care fiecare parametru $t \mapsto X_t(i)$ este o funcție continuă de t.

Din Propoziția 1, dacă $t_k \to t$ în J, atunci $X_{t_k} \to X_t$.

Propoziția 4. *Fie $(X_t)_{t\in J}$ o familie continuă și $\Phi : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ o mărime continuă. Atunci funcția $t \mapsto \Phi(X_t)$ este continuă pe J. În particular, dacă $\alpha, \beta \in J$ și $\Phi(X_\alpha) \le 0 \le \Phi(X_\beta)$, există t între α și β cu $\Phi(X_t) = 0$.*

Demonstrație. Dacă $t_k \to t$, atunci $X_{t_k} \to X_t$, deci $\Phi(X_{t_k}) \to \Phi(X_t)$ (Definiția 10). Funcția $t \mapsto \Phi(X_t)$ este deci continuă pe intervalul J și are proprietatea lui Darboux [1]. □

3. Aplicații

3.1 Problema 4. IMC 2004, ziua 2, problema 4

Enunț. Pentru $n \ge 1$, fie M o matrice complexă de tip $n \times n$ cu valorile proprii distincte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, cu multiplicitățile $m_1, m_2, \ldots, m_k$. Considerăm operatorul liniar L_M definit prin $L_M(X) = MX + XM^T$, pentru orice matrice complexă X de tip $n \times n$. Aflați valorile proprii ale lui L_M și multiplicitățile lor.

Sursa: [23]. Soluția oficială tratează întâi cazul în care valorile proprii ale lui M sunt distincte și toate sumele $\lambda_r + \lambda_s$ sunt diferite, apoi observă că orice M este limita unor matrice de acest tip și încheie „by the continuity of the eigenvalues". Fraza este corectă, dar valorile proprii nu au o ordine naturală, deci nu sunt, luate una câte una, mărimi în sensul Secțiunii 2. Arătăm cum se face riguroasă.

Răspuns. Valorile proprii sunt $2\lambda_r$, cu multiplicitatea m_r^2 $(1 \le r \le k)$, și $\lambda_r + \lambda_s$, cu multiplicitatea $2m_rm_s$ $(1 \le r < s \le k)$; dacă unele dintre aceste numere coincid, multiplicitățile lor se adună.

Soluție. Notăm $\mu_1, \ldots, \mu_n$ valorile proprii ale lui M, scrise cu multiplicități (fiecare λ_r apare de m_r ori). Fie $p_M(t) = \det(t\,\mathrm{Id} - L_M)$ polinomul caracteristic al lui L_M, adică determinantul matricei de tip $n^2 \times n^2$ a lui $X \mapsto tX - L_M(X)$ în baza (E_{ij}), și

$$q_M(t) = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}(t - \mu_i - \mu_j).$$

Grupând factorii lui q_M după valorile λ_r, λ_s ale lui μ_i, μ_j, obținem

$$q_M(t) = \prod_{r=1}^{k} (t - 2\lambda_r)^{m_r^2} \prod_{1 \le r < s \le k} (t - \lambda_r - \lambda_s)^{2m_r m_s}.$$

Răspunsul este deci echivalent cu identitatea $p_M(t) = q_M(t)$, pentru orice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ și orice $t \in \mathbb{C}$. Fixăm t; obiectele sunt matricele M, cu n^2 parametri.

Pasul 1: $M \mapsto p_M(t)$ este continuă. Matricea lui L_M în baza (E_{ij}) are elemente liniare în elementele lui M, deci $p_M(t)$ este o expresie polinomială în elementele lui M (Propoziția 2).

Pasul 2: $M \mapsto q_M(t)$ este continuă. Aici este partea delicată, „continuitatea valorilor proprii". Nu urmărim valorile proprii una câte una, ci doar o expresie simetrică în ele. Permutând numerele $\mu_1, \ldots, \mu_n$, factorii lui $q_M(t)$ doar se permută, deci $q_M(t)$ este un polinom simetric în $\mu_1, \ldots, \mu_n$ (cu coeficienți care depind polinomial de t). Din teorema fundamentală a polinoamelor simetrice [4], el se scrie ca polinom în $e_1, \ldots, e_n$, polinoamele simetrice fundamentale ale lui $\mu_1, \ldots, \mu_n$. Din relațiile lui Viète, $(-1)^k e_k$ este coeficientul lui t^{n-k} din $\det(tI_n - M)$, deci o expresie polinomială în elementele lui M. Așadar $q_M(t)$ este o expresie polinomială în elementele lui M, deci o mărime continuă.

Pasul 3: egalitatea pe o clasă densă. Fie $\mathcal{D}$ clasa matricelor cu n valori proprii distincte. O astfel de matrice are o bază de vectori proprii $v_1, \ldots, v_n$, cu $Mv_i = \mu_i v_i$ [3]. Atunci

$$L_M(v_i v_j^T) = (Mv_i)v_j^T + v_i(Mv_j)^T = (\mu_i + \mu_j)\, v_i v_j^T.$$

Cele n^2 matrice $v_i v_j^T$ sunt liniar independente: dacă $\sum c_{ij} v_i v_j^T = O_n$, atunci $VCV^T = O_n$, unde V are coloanele $v_1, \ldots, v_n$ (inversabilă) și $C = (c_{ij})$, deci $C = O_n$. Ele formează deci o bază a lui $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, formată din vectori proprii ai lui L_M; în această bază L_M are matricea diagonală cu elementele $\mu_i + \mu_j$, iar polinomul caracteristic nu depinde de bază. Deci $p_M(t) = q_M(t)$ pe $\mathcal{D}$. (Nu avem nevoie ca sumele $\mu_i + \mu_j$ să fie distincte.)

Pasul 4: $\mathcal{D}$ este densă. Orice matrice complexă este asemenea cu o matrice superior triunghiulară [3]: $M = PTP^{-1}$, iar diagonala lui T conține valorile proprii $t_{11}, \ldots, t_{nn}$. Pentru ε real, matricea $T_\varepsilon = T + \varepsilon \operatorname{diag}(1, 2, \ldots, n)$ are pe diagonală numerele $t_{ii} + i\varepsilon$, distincte două câte două, cu excepția a cel mult $\frac{n(n-1)}{2}$ valori ale lui ε (egalitatea $t_{ii} + i\varepsilon = t_{jj} + j\varepsilon$, cu $i \neq j$, fixează ε). Alegem $\varepsilon_k \to 0$ evitând aceste valori. Matricele $M_k = PT_{\varepsilon_k}P^{-1} = M + \varepsilon_k P \operatorname{diag}(1, \ldots, n) P^{-1}$ au n valori proprii distincte și $M_k \to M$.

Pasul 5: extinderea. Cu t fixat, $M \mapsto p_M(t)$ și $M \mapsto q_M(t)$ sunt continue pe $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ și egale pe clasa densă $\mathcal{D}$; din Teorema 1 a), sunt egale pe $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. □

> *Observație* (un drum fără limite). Triangularizarea dă și o soluție directă. Cu $X = PYP^T$ avem $L_M(X) = P\left(TY + YT^T\right)P^T$, deci L_M are același polinom caracteristic ca L_T. Un calcul direct dă
>
> $$L_T(E_{ij}) = (t_{ii} + t_{jj})E_{ij} + \sum_{l<i} t_{li}E_{lj} + \sum_{l<j} t_{lj}E_{il},$$
>
> deci matricea lui L_T în baza (E_{ij}), ordonată lexicografic după (i, j), este triunghiulară, cu diagonala $t_{ii} + t_{jj}$. Cum am folosit oricum triangularizarea la Pasul 4, aici continuitatea nu scurtează soluția. Rostul ei este să arate că fraza din soluția oficială se poate face riguroasă cu uneltele din Secțiunea 2.

3.2 Problema 5. Adjuncta unei matrice de ordinul 3

Enunț. Fie $X, Y, Z \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Notăm cu A^* adjuncta matricei A.

(a) Demonstrați identitatea

$$(X+Y+Z)^* + X^* + Y^* + Z^* = (X+Y)^* + (Y+Z)^* + (Z+X)^*.$$

(b) Demonstrați echivalența

$$(X+Y+Z)^* = 3(X^*+Y^*+Z^*) \iff (X-Y)^* + (Y-Z)^* + (Z-X)^* = O_3.$$

Sursa: Gazeta Matematică [19].

Soluție. *Ideea.* Pentru o matrice inversabilă, adjuncta este $(\det A)A^{-1}$, iar teorema Cayley-Hamilton o scrie ca un polinom de gradul al doilea în A. Formula astfel obținută se extinde prin continuitate la toate matricele, iar cu ea ambele puncte devin calcule cu o expresie „de gradul al doilea".

Pasul 1: formula pentru matrice inversabile. Pentru $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ fie $s_1(A) = \operatorname{tr} A$, $s_2(A) = \frac{1}{2}\big((\operatorname{tr} A)^2 - \operatorname{tr}(A^2)\big)$ și $s_3(A) = \det A$. Teorema Cayley-Hamilton dă $A^3 - s_1(A)A^2 + s_2(A)A - s_3(A)I_3 = O_3$, adică

$$A\big(A^2 - s_1(A)A + s_2(A)I_3\big) = (\det A)\, I_3.$$

Dacă A este inversabilă, înmulțim la stânga cu A^{-1} și, cum $A^* = (\det A)A^{-1}$, obținem

$$A^* = A^2 - s_1(A)A + s_2(A)I_3. \tag{F}$$

Pasul 2: formula pentru orice matrice. Obiectele sunt matricele $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, cu 9 parametri. Fiecare element al matricei $\Phi(A) = A^* - A^2 + s_1(A)A - s_2(A)I_3$ este o expresie polinomială în elementele lui A (elementele lui A^* sunt minori de ordinul 2), deci este o mărime continuă (Propoziția 2). Din Pasul 1, Φ este nulă pe matricele inversabile, care formează o clasă densă (Lema 3, pentru $n = 3$). Din Teorema 1 a), aplicată fiecărui element, $\Phi = O_3$ pe tot $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$: formula (F) are loc pentru orice matrice.

Pasul 3: o expresie de gradul al doilea. Notăm $Q(A) = A^2 - s_1(A)A + s_2(A)I_3$ și, pentru $U, V \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$,

$$B(U,V) = UV + VU - (\operatorname{tr} U)V - (\operatorname{tr} V)U + \big(\operatorname{tr} U \operatorname{tr} V - \operatorname{tr}(UV)\big)I_3.$$

Dezvoltând, $Q(U+V) = Q(U) + Q(V) + B(U,V)$; în plus B este simetrică și liniară în fiecare argument, iar $Q(-U) = Q(U)$. Din Pasul 2, $A^* = Q(A)$ pentru orice A.

Pasul 4: concluzia. a) Aplicând de două ori relația de la Pasul 3,

$$(X+Y+Z)^* = Q(X) + Q(Y) + Q(Z) + B(X,Y) + B(Y,Z) + B(Z,X),$$

iar $(X+Y)^* + (Y+Z)^* + (Z+X)^* = 2\big(Q(X)+Q(Y)+Q(Z)\big) + B(X,Y) + B(Y,Z) + B(Z,X)$. Diferența celor doi membri ai identității este deci 0.

b) Cum $Q(X-Y) = Q(X) + Q(Y) - B(X,Y)$,

$$(X-Y)^* + (Y-Z)^* + (Z-X)^* = 2\big(Q(X)+Q(Y)+Q(Z)\big) - B(X,Y) - B(Y,Z) - B(Z,X),$$

iar $(X+Y+Z)^* - 3(X^*+Y^*+Z^*) = B(X,Y)+B(Y,Z)+B(Z,X) - 2\big(Q(X)+Q(Y)+Q(Z)\big)$. Cele două expresii sunt opuse, deci una este O_3 exact când cealaltă este O_3. □

> *Observație.* Limita se poate evita: elementele lui A^* sunt minori de ordinul 2, deci polinoame omogene de gradul al doilea în elementele lui A, iar a) și b) sunt identități valabile pentru orice astfel de aplicație. Soluția de mai sus arată însă cum se obține formula (F) pentru orice matrice din cazul inversabil, exact ca în Problemele 1 și 2.

3.3 Problema 6. ONM 2009, clasa a XII-a, problema 4

Enunț. Să se determine toate funcțiile $f : [0,1] \to [0,1]$ continue și bijective cu proprietatea că

$$\int_0^1 g\big(f(x)\big)\,dx = \int_0^1 g(x)\,dx$$

pentru orice funcție continuă $g : [0,1] \to \mathbb{R}$.

Sursa: [20].

Soluție. *Ideea.* Dacă g ar putea fi indicatorul unui interval $[a,b]$, ipoteza ar spune că f trimite în $[a,b]$ o mulțime de lungime $b-a$. Indicatorul nu este continuu, așa că îl încadrăm între două funcții continue „trapez” și trecem la limită.

Pasul 1: preimaginea unui interval. O funcție continuă și bijectivă pe $[0,1]$ este strict monotonă, iar inversa ei este tot continuă și strict monotonă. Pentru $0 \le a < b \le 1$, mulțimea $f^{-1}([a,b])$ este deci un interval $[c,d]$ și $\int_0^1 \mathbf{1}_{[a,b]}\big(f(x)\big)\,dx = d-c$.

Pasul 2: încadrarea. Pentru $\varepsilon > 0$, fie g_ε funcția continuă egală cu 1 pe $[a,b]$, cu 0 în afara lui $[a-\varepsilon, b+\varepsilon]$ și liniară între ele (restrânsă la $[0,1]$). Cum $g_\varepsilon \ge \mathbf{1}_{[a,b]}$,

$$d-c \le \int_0^1 g_\varepsilon\big(f(x)\big)\,dx = \int_0^1 g_\varepsilon(x)\,dx \le b-a+\varepsilon.$$

Pentru $0 < \varepsilon < \frac{b-a}{2}$, fie h_ε funcția continuă egală cu 1 pe $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$, cu 0 în afara lui $[a,b]$ și liniară între ele. Cum $h_\varepsilon \le \mathbf{1}_{[a,b]}$,

$$d-c \ge \int_0^1 h_\varepsilon\big(f(x)\big)\,dx = \int_0^1 h_\varepsilon(x)\,dx \ge b-a-2\varepsilon.$$

Făcând $\varepsilon \to 0$, obținem $d-c = b-a$: preimaginea oricărui interval are aceeași lungime ca intervalul.

Pasul 3: concluzia. Dacă f este crescătoare, $f^{-1}([0,y]) = [0, f^{-1}(y)]$ are lungimea y, deci $f^{-1}(y) = y$ și $f(x) = x$. Dacă f este descrescătoare, $f^{-1}([0,y]) = [f^{-1}(y), 1]$ are lungimea y, deci $f^{-1}(y) = 1-y$ și $f(x) = 1-x$. Ambele funcții verifică ipoteza (pentru a doua, cu schimbarea de variabilă $x \mapsto 1-x$). □

> *Observație.* Limita din Pasul 2 este una obișnuită, după un singur număr ε: trapezele nu se apropie de indicator în distanța „cea mai mare abatere” (distanța rămâne 1). Problema următoare pornește de la aceasta și are nevoie chiar de continuitatea din Secțiunea 2.

3.4 Problema 7. O variantă cu puteri

Enunț. Fie $f : [0,1] \to [0,1]$ o funcție continuă și bijectivă astfel încât

$$\int_0^1 f(x)^k\,dx = \frac{1}{k+1} \quad \text{pentru orice } k \in \mathbb{N}.$$

Arătați că $f(x) = x$ pentru orice x sau $f(x) = 1-x$ pentru orice x.

Problemă nouă, construită pornind de la Problema 6.

Soluție. *Ideea.* Ipoteza spune că egalitatea din Problema 6 are loc pentru $g(x) = x^k$, deci pentru orice polinom. Polinoamele sunt dense printre funcțiile continue, iar mărimea care exprimă egalitatea este continuă; o extindem la toate funcțiile continue și aplicăm Problema 6.

Pasul 1: obiectele și mărimea. Obiectele sunt funcțiile continue $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, cu distanța „cea mai mare abatere” $d(g,h) = \max_{[0,1]} |g-h|$, ca în Problema 3 (exemplul d) din Secțiunea 2). Fie

$$\Phi(g) = \int_0^1 g\big(f(x)\big)\,dx - \int_0^1 g(x)\,dx.$$

Cum f ia valori în $[0,1]$, avem $|g(f(x)) - h(f(x))| \le d(g,h)$ pentru orice x, deci

$$|\Phi(g) - \Phi(h)| \le \int_0^1 |g(f(x)) - h(f(x))|\,dx + \int_0^1 |g(x) - h(x)|\,dx \le 2\,d(g,h),$$

iar Φ este o mărime continuă.

Pasul 2: clasa densă. Pentru $g(x) = x^k$, ipoteza spune exact $\Phi(g) = \int_0^1 f(x)^k\,dx - \frac{1}{k+1} = 0$. Cum Φ este liniară, $\Phi(P) = 0$ pentru orice polinom P. Din teorema de aproximare a lui Weierstrass (pe care o folosim fără demonstrație), orice funcție continuă pe $[0,1]$ este limita unui șir de polinoame în distanța d: polinoamele formează o clasă densă.

Pasul 3: extinderea. Din Teorema 1 a), $\Phi(g) = 0$ pentru orice funcție continuă g. Funcția f verifică deci ipoteza Problemei 6, așa că $f(x) = x$ sau $f(x) = 1 - x$; ambele verifică și ipoteza de aici, pentru că $\int_0^1 x^k\,dx = \int_0^1 (1-x)^k\,dx = \frac{1}{k+1}$. □

4. Când nu funcționează

Fiecare dintre exemplele de mai jos încalcă una dintre verificările din lista din Secțiunea 2.4.

4.1 Clasa densă trebuie să fie în clasa ipotezei: OJM 2025, clasa a XI-a, problema 2

Enunț. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 3$. Spunem că o matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ are proprietatea $(\mathcal{P})$ dacă $\det(A + X_{ij}) = \det(A + X_{ji})$, oricare ar fi $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, unde $X_{ij} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ este matricea care are 1 pe poziția (i,j) și 0 în rest.

(a) Arătați că dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ are proprietatea $(\mathcal{P})$ și $\det(A) \ne 0$, atunci $A = A^T$.

(b) Dați un exemplu de matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ care are proprietatea $(\mathcal{P})$, dar $A \ne A^T$.

Sursa: [17]. Soluția de mai jos este cea din barem.

Soluție. a) Dezvoltând după linia i, $\det(A + X_{ij}) = \det A + \delta_{ij}$, unde δ_{ij} este complementul algebric al elementului de pe poziția (i,j). Proprietatea $(\mathcal{P})$ înseamnă deci $\delta_{ij} = \delta_{ji}$, adică adjuncta A^* este simetrică. Pentru $d = \det A \ne 0$ avem $AA^* = dI_n = (dI_n)^T = (A^*A)^T = A^T(A^*)^T = A^TA^*$, iar $\det A^* = d^{n-1} \ne 0$, deci $A = A^T$. b) Matricea $A = X_{11} + X_{12}$: pentru $n \ge 3$, fiecare $A + X_{ij}$ are cel puțin o linie nulă, deci toți determinanții sunt 0.

Lecția. Matricele inversabile sunt dense în $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (Lema 3), mărimea $A \mapsto A - A^T$ este continuă și, din a), este nulă pe matricele inversabile cu proprietatea $(\mathcal{P})$. Totuși concluzia nu se extinde: matricea de la b) are $(\mathcal{P})$ și nu este simetrică. Explicația este verificarea (c). Clasa pe care are loc ipoteza este $\mathcal{O} = \{A : A \text{ are } (\mathcal{P})\}$, iar membrii ei inversabili *nu* sunt denși în $\mathcal{O}$: ei sunt simetrici, iar o limită de matrice simetrice este simetrică, deci $X_{11} + X_{12} \in \mathcal{O}$ nu este limita lor. Perturbarea $A \mapsto A + tI_n$, care a funcționat în Problemele 1 și 2, nu rămâne aici în $\mathcal{O}$: pentru $A = X_{11} + X_{12}$ și $t \notin \{0, -1\}$, matricea $A + tI_n$ este inversabilă (superior triunghiulară, cu determinantul $(1+t)t^{n-1}$) și nesimetrică, deci, din a), nu are $(\mathcal{P})$.

4.2 Mărimi care nu sunt continue: rangul și asemănarea

Fie $A = E_{12}$ și $B = E_{11}$, perechea din Pasul 4 al Problemei 2: $AB = O_n$ și $BA = E_{12}$. Pentru A inversabilă, $\operatorname{rang}(AB) = \operatorname{rang} B = \operatorname{rang}(BA)$, iar matricele inversabile sunt dense; totuși aici rangurile sunt 0 și 1. Rangul nu este o mărime continuă, pentru că nu are proprietatea lui Darboux: pe familia continuă $t \mapsto tI_n$, $t \in [0,1]$, el ia valoarea 0 pentru $t = 0$ și valoarea n pentru $t \neq 0$, dar nicio valoare dintre ele (de exemplu $\frac{1}{2}$), ceea ce, din Propoziția 4, nu se poate întâmpla pentru o mărime continuă. Verificarea (b) eșuează. La fel, pentru A inversabilă $BA = A^{-1}(AB)A$ este asemenea cu AB, dar pentru perechea de mai sus $AB = O_n$ și $BA \neq O_n$ nu sunt asemenea (singura matrice asemenea cu O_n este O_n), deși au același polinom caracteristic, t^n (Secțiunea 2). Asemănarea nu se scrie ca egalitate între mărimi continue.

4.3 Distanța aleasă contează: lungimea unui grafic

Pentru $k \geq 1$, fie $g_k : [0,1] \to \mathbb{R}$ funcția care, pe fiecare interval $\left[\frac{j}{k}, \frac{j+1}{k}\right]$, crește cu panta 2 pe prima jumătate și este constantă pe a doua, cu $g_k(0) = 0$; astfel $g_k\left(\frac{j}{k}\right) = \frac{j}{k}$. Atunci $|g_k(x) - x| \leq \frac{1}{2k}$, deci g_k converge uniform la $g(x) = x$. Graficul lui g_k are însă, pe fiecare interval, un segment de lungime $\frac{\sqrt{5}}{2k}$ și unul de lungime $\frac{1}{2k}$, deci lungimea totală $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, pentru orice k, în timp ce graficul limitei are lungimea $\sqrt{2}$. Lungimea graficului nu este o mărime continuă față de distanța uniformă (verificarea (b)). Distanța „cea mai mare abatere” controlează valorile, nu pantele.

4.4 Avertismentele, adunate

- *Inegalitatea strictă devine nestrictă.* Pe $\mathcal{O} = [0, +\infty)$, cu $\mathcal{D} = (0, +\infty)$ densă, $\Phi(x) = x$ și $\Psi(x) = 0$ verifică $\Phi > \Psi$ pe $\mathcal{D}$, dar $\Phi(0) = \Psi(0)$.
- *Convergența punctuală nu păstrează integrala*: exemplul cu vârfuri din Secțiunea 2.2.
- *Concurența se poate pierde la limită.* Dreptele $y = 0$, $\frac{1}{k}x - y - 1 = 0$ și $\frac{1}{k}x + y - 1 = 0$ trec toate prin $(k, 0)$. Tripletele lor tind la $(0, 1, 0)$, $(0, -1, -1)$ și $(0, 1, -1)$, adică la dreptele paralele $y = 0$, $y = -1$ și $y = 1$, care nu au niciun punct comun. De aceea, când exprimăm concurența prin anularea determinantului coeficienților, primele două drepte trebuie să fie neparalele (verificarea (d), Exercițiul 4).

5. Exerciții

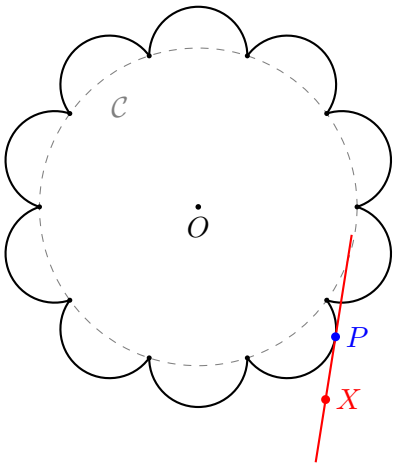
1. *(IMC 2004, ziua 1, problema 3 a) [18].)* Fie $n \geq 2$ și S_n mulțimea sumelor $x_1 + \cdots + x_n$ cu $0 \leq x_1, \ldots, x_n \leq \frac{\pi}{2}$ și $\sin x_1 + \cdots + \sin x_n = 1$. Arătați că S_n este un interval.

Indicație: cu $y_k = \sin x_k$, S_n este mulțimea valorilor lui $\sum \arcsin y_k$ pe $Y = \{y \in [0,1]^n : y_1 + \cdots + y_n = 1\}$. Pentru $y, y' \in Y$, punctele $(1-t)y + ty'$, $t \in [0,1]$, sunt în Y și formează o familie continuă; mărimea $\sum \arcsin y_k$ este continuă (Propoziția 2 b), cu $\arcsin$ continuă pe $[0,1]$), deci Propoziția 4 dă toate valorile intermediare. Soluția oficială folosește noțiunea de conexitate.

2. Demonstrați, întâi pentru matrice inversabile, apoi prin Teorema 1, identitățile: a) $\det(I_n + AB) = \det(I_n + BA)$; b) $(AB)^* = B^*A^*$; c) $(A^*)^* = (\det A)^{n-2}A$, pentru $n \geq 3$; d) teorema Cayley-Hamilton, $p_M(M) = O_n$, unde p_M este polinomul caracteristic al lui M.

Indicație: la b) obiectele sunt perechile (A, B), cu $2n^2$ parametri, iar perechile $(A + t_k I_n, B + t_k I_n)$ cu ambele matrice inversabile le aproximează. La c), pentru A inversabilă, $A^* = (\det A)A^{-1}$. La d), clasa densă este cea din Pasul 4 al Problemei 4: o matrice cu n valori proprii distincte se scrie $P\Lambda P^{-1}$ cu Λ diagonală, iar $p_M(P\Lambda P^{-1}) = P\, p_M(\Lambda)\, P^{-1} = O_n$.

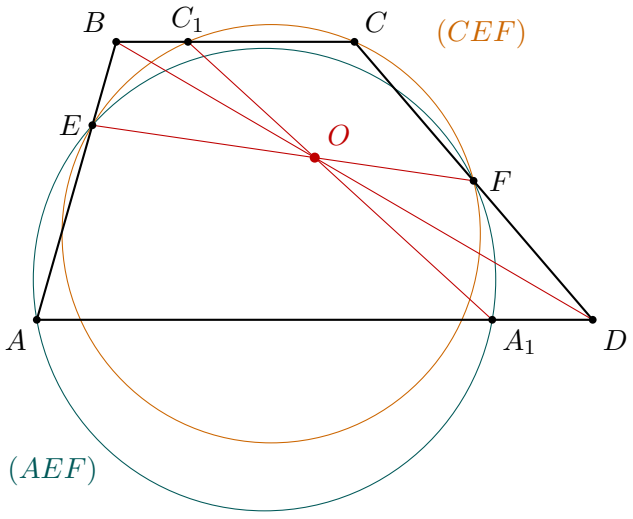
3. *(Problemă proprie, punctul (a) al problemei OJM.17 din [1].)* Fie $n \geq 4$ și $A_1A_2 \ldots A_n$ un poligon regulat înscris în cercul $\mathcal{C}$ de centru O și rază R (planeta). Pe fiecare latură A_iA_{i+1} (cu $A_{n+1} = A_1$) construim, spre exteriorul lui $\mathcal{C}$, semicercul de diametru A_iA_{i+1}. Numim *tangentă* orice dreaptă tangentă la unul dintre aceste semicercuri, inclusiv în capetele lui (în capete, tangenta este perpendiculara pe latură). Demonstrați că prin orice punct X cu $OX \geq R$ trece o tangentă.



Cazul $n = 10$: tangenta în punctul P al unei petale trece prin punctul X.

4. *(RMM Shortlist 2017, G1 [24].)* Fie $ABCD$ un trapez cu $AD \parallel BC$, iar E și F puncte în interiorul laturilor $[AB]$, respectiv $[DC]$. Cercul circumscris triunghiului AEF retaie dreapta AD în A_1, iar cercul circumscris triunghiului CEF retaie dreapta BC în C_1 (dacă cercul este tangent dreptei, $A_1 = A$, respectiv $C_1 = C$). Arătați că dreptele BD, EF și A_1C_1 sunt concurente.

Presupunem problema rezolvată în cazul $EF \nparallel AD$ (o soluție se găsește în [25, paginile 39 la 40]). Cum terminați problema, adică cum tratați cazul $EF \parallel AD$?



Cazul 1 ($EF \nparallel AD$): dreptele BD, EF și A_1C_1 trec prin punctul O.

5. *(Putnam 2003, A2 [22].)* Fie $a_1, \ldots, a_n$ și $b_1, \ldots, b_n$ numere reale nenegative. Arătați că

$$(a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n} + (b_1 b_2 \cdots b_n)^{1/n} \leq \left[(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \cdots (a_n + b_n)\right]^{1/n}.$$

Indicație: obiectele sunt perechile de n-upluri cu elemente nenegative, cu $2n$ parametri, iar ambii membri sunt mărimi continue (rădăcina de ordinul n este continuă pe $[0, \infty)$, Propoziția 2 b). Perechile cu toți $a_i > 0$ formează o clasă densă (înlocuiți a_i cu $a_i + \frac{1}{k}$). Pe ea, dacă un b_i este 0 inegalitatea este imediată; altfel, împărțind la $(a_1 \cdots a_n)^{1/n}$ și notând $y_i = \ln \frac{b_i}{a_i}$, ea devine inegalitatea lui Jensen pentru funcția convexă $y \mapsto \ln(1 + e^y)$. Teorema 1 b) încheie.

6. *(Turneul Orașelor, 1990/91, turul de toamnă, varianta de bază, clasele 10 la 11, problema 4 [21].)* În plan sunt 20 de puncte, oricare trei necoliniare: 10 albastre și 10 roșii. Demonstrați că există o dreaptă care are de fiecare parte câte 5 puncte albastre și 5 puncte roșii.

7. Arătați că triunghiurile scalene (cu laturile de lungimi diferite două câte două) formează o clasă densă în clasa triunghiurilor nedegenerate.

Indicație: fie ABC nedegenerat, w un vector unitar al dreptei AB și $C_t = C + tw$. Punctul C_t rămâne la aceeași distanță nenulă de dreapta AB, deci ABC_t este nedegenerat. Condiția $C_tA = C_tB$ înseamnă C_t pe mediatoarea lui AB, care taie dreapta $\{C + tw\}$ (perpendiculară pe ea) într-un singur punct; condiția $C_tA = AB$ înseamnă C_t pe un cerc, care taie o dreaptă în cel mult două puncte; la fel $C_tB = AB$. Rămân cel mult cinci valori excluse ale lui t.

Concluzie

Am pornit de la continuitatea de la liceu, definită pentru funcții de o variabilă reală, și am extins-o la obiecte care nu sunt numere: matrice, funcții, drepte, configurații geometrice. Scopul a fost să vedem când putem formaliza conceptul de trecere la limită și pentru astfel de obiecte. Răspunsul este cel din Secțiunea 2.4: putem trece la limită atunci când proprietatea se scrie ca egalitate sau inegalitate nestrictă între mărimi continue și se demonstrează pe o clasă densă de obiecte; Teorema 1 o extinde apoi la toate obiectele.

Lista de verificări (a) la (d) spune ce trebuie scris efectiv: parametrii obiectelor; continuitatea mărimilor pe toată clasa (numitori nenuli, argumente în domeniul radicalului sau al lui arccos); o clasă densă chiar în clasa pe care are loc ipoteza; drumul înapoi de la egalitatea între mărimi la proprietatea cerută. Exemplele din Secțiunea 4 arată că fiecare dintre aceste verificări poate eșua.

Multe dintre problemele din text au și o soluție fără limite, pe care am semnalat-o de fiecare dată.

Bibliografie

[1] V.-Ș. Constantinescu, *Analiză pentru Olimpiadă, clasa a XI-a*, ediția a doua, manuscris, 2026 (în curs de publicare).

[2] V.-Ș. Constantinescu, *Analiză pentru Olimpiadă, clasa a XII-a*, ediția a doua, manuscris, 2026 (în curs de publicare).

[3] V.-Ș. Constantinescu, *Algebră pentru Olimpiadă, clasa a XI-a*, ediția a doua, manuscris, 2026 (în curs de publicare).

[4] V.-Ș. Constantinescu, *Algebră pentru Olimpiadă, clasa a XII-a*, ediția a doua, manuscris, 2026 (în curs de publicare).

[5] V.-Ș. Constantinescu, *The Romanian Higher Algebra and Analysis Olympiad, Volume 1: Grade 11 Analysis. Complete Theory and Problems*, Second Edition, 2026. https://www.amazon.com/dp/B0HC7VS3B6

[6] V.-Ș. Constantinescu, *The Romanian Higher Algebra and Analysis Olympiad, Volume 2: Grade 12 Analysis. Complete Theory and Problems*, Second Edition, 2026. https://www.amazon.com/dp/B0HC7T685W

[7] V.-Ș. Constantinescu, *The Romanian Higher Algebra and Analysis Olympiad, Volume 3: Linear Algebra. Complete Theory and Problems*, Second Edition, 2026. https://www.amazon.com/dp/B0HC7SKYB8

[8] V.-Ș. Constantinescu, *The Romanian Higher Algebra and Analysis Olympiad, Volume 4: Abstract Algebra. Complete Theory and Problems*, Second Edition, 2026. https://www.amazon.com/dp/B0HHNJ2Q4M

[9] V.-Ș. Constantinescu, *L'Olympiade roumaine d'algèbre et d'analyse supérieures, Volume 1 : Analyse de onzième. Théorie complète et problèmes*, deuxième édition, 2026. https://www.amazon.fr/dp/B0HGZRNJJ4

[10] V.-Ș. Constantinescu, *L'Olympiade roumaine d'algèbre et d'analyse supérieures, Volume 2 : Analyse de douzième. Théorie complète et problèmes*, deuxième édition, 2026. https://www.amazon.fr/dp/B0HJZV48LB

[11] V.-Ș. Constantinescu, *L'Olympiade roumaine d'algèbre et d'analyse supérieures, Volume 3 : Algèbre linéaire. Théorie complète et problèmes*, deuxième édition, 2026. https://www.amazon.fr/dp/B0HHHH6X1Q

[12] V.-Ș. Constantinescu, *L'Olympiade roumaine d'algèbre et d'analyse supérieures, Volume 4 : Algèbre abstraite. Théorie complète et problèmes*, deuxième édition, 2026. https://www.amazon.fr/dp/B0HH111QMB

[13] Olimpiada Națională de Matematică, etapa națională, Piatra-Neamț, 16 aprilie 2022, clasa a XI-a, soluții și bareme, SSMR. https://ssmr.ro/files/onm2022/finala/cl11_nationala.pdf

[14] Olimpiada de Matematică, etapa județeană 2026, clasa a XI-a, subiecte. https://cdn.edupedu.ro/wp-content/uploads/2026/03/Cl_11_a_subiecte_OJM_2026_RO.pdf

[15] Olimpiada de Matematică, etapa județeană 2026, clasa a XI-a, soluții și bareme. https://cdn.edupedu.ro/wp-content/uploads/2026/03/Cl_11_a_solutii_bareme_OJM_2026.pdf

[16] Olimpiada de Matematică, etapa județeană 2004, clasa a XII-a, enunțuri și soluții (transcrise în baza de date ROHS a autorului).

[17] Olimpiada Națională de Matematică, etapa județeană 2025, clasa a XI-a, soluții, SSMR. http://ssmr.ro/files/onm2025/faza_municipiu/barem_clasa11.pdf

[18] 11th International Mathematics Competition for University Students (IMC), Skopje, 2004, Day 1, Problems and Solutions. https://www.imc-math.org.uk/archive/problems/2004/IMC_2004_Day_1_Problems_and_Solutions.pdf

[19] Gazeta Matematică, nr. 6-8/2025, problemă propusă.

[20] Olimpiada Națională de Matematică, 2009, clasa a XII-a, problema 4.

[21] Turneul Orașelor, 1990/91, turul de toamnă, varianta de bază, clasele 10 la 11, problema 4, pe problems.ru, problema 98078. https://problems.ru/view_problem_details_new.php?id=98078

[22] The 64th William Lowell Putnam Mathematical Competition, 2003, problema A2; enunțuri și soluții în arhiva lui K. Kedlaya. https://kskedlaya.org/putnam-archive/2003.tex

[23] 11th International Mathematics Competition for University Students (IMC), Skopje, 2004, Day 2, Problems and Solutions. https://www.imc-math.org.uk/archive/problems/2004/IMC_2004_Day_2_Problems_and_Solutions.pdf

[24] M. Rakovsky, *Progresser en géométrie*, curs POFM (Préparation Olympique Française de Mathématiques). https://maths-olympiques.fr/wp-content/uploads/2023/02/cours.pdf

[25] M. Rakovsky, *Progresser en géométrie. Solutions*, POFM. https://maths-olympiques.fr/wp-content/uploads/2023/02/solutions.pdf