L'Olympiade roumaine d'algèbre et d'analyse supérieures

Volume 1 : Analyse, onzième

Suites, limites, continuité, dérivabilité

Théorie complète et problèmes

Vlad-Ștefan Constantinescu

L'Olympiade roumaine d'algèbre et d'analyse supérieures
Volume 1 : Analyse, onzième

Auteur : Vlad-Ștefan Constantinescu
Deuxième édition, Bucarest, 2026

© 2026 Vlad-Ștefan Constantinescu. Tous droits réservés.

Aucune partie de cet ouvrage ne peut être reproduite ou transmise sous quelque forme et par quelque moyen que ce soit, électronique ou mécanique, sans l'accord écrit préalable de l'auteur, à l'exception de courtes citations dans des recensions et des ouvrages de référence.

Composition : l'auteur, en LaTeX (XeLaTeX).

Table des matières

Avant-propos 4

Remerciements 6

I ANALYSE MATHÉMATIQUE 7

1 Rédaction et problèmes de constructions 8

1.1 La rédaction en analyse : du dessin à la démonstration 8

1.1.1 Comment rédiger une solution, en général 8

1.1.2 La méthode graphique : du dessin à la démonstration 9

1.1.3 Pièges fréquents (onzième) 12

1.1.4 Pièges avec les intégrales (douzième) 12

1.2 Constructions : quelles fonctions essayer 13

1.2.1 Principes généraux de construction 13

1.2.2 Réflexe 2 : la condition $f > 0$ sur tout le domaine . . . 15

1.2.3 Réflexe 3 : discontinuités contrôlées, fonctions de type Dirichlet 15

1.2.4 Réflexe 4 : quelles fonctions classiques vérifiant l'hypothèse est-ce que je connais ? 16

II SIX PROBLÈMES DU LIVRE 19

Avant-propos

À propos de ce volume. Ceci est le Volume 1 d'une série de quatre volumes. Il couvre l'analyse mathématique de la classe de onzième (suites, limites, continuité, dérivabilité), ainsi que le pont vers la douzième. Les volumes qui l'accompagnent sont consacrés à l'analyse de douzième, à l'algèbre linéaire et à l'algèbre abstraite.

Le volume comporte deux grandes composantes : **la théorie**, avec des démonstrations complètes et des exemples, et **les problèmes**, regroupés selon trois niveaux de difficulté (Niveau 1 · Niveau 2 · Niveau 3). Dans la partie théorique, j'ai inclus deux sections que je juge essentielles et qui manquent souvent dans les livres d'olympiades : une sur la **rédaction** (comment écrire une démonstration rigoureuse et quelles fautes de forme le jury pénalise) et une sur les **constructions** (quels objets essayer lorsque l'énoncé ne donne aucune direction).

Les trois niveaux. Tout au long du livre, les problèmes sont classés en trois niveaux, calqués sur les trois étapes de l'Olympiade roumaine de mathématiques : **Niveau 1** (l'épreuve locale, d'école et de ville, appelée OLM en Roumanie), **Niveau 2** (l'épreuve départementale, OJM) et **Niveau 3** (la finale nationale, ONM). Les problèmes sont numérotés en conséquence : N1.5 est le cinquième problème du Niveau 1. En gros, les problèmes du Niveau 1 sont des problèmes de compétition accessibles, le Niveau 2 correspond à une olympiade régionale solide, et les problèmes du Niveau 3 sont du niveau d'une finale nationale, comparables, pour la matière de ce livre, aux problèmes les plus durs de compétitions universitaires comme le Putnam.

Analyse vs. algèbre. L'analyse mathématique est un sujet continu : le programme de douzième n'est rien d'autre qu'un prolongement naturel de celui de onzième, et les limites, les intégrales et les séries vivent dans le même monde. C'est pourquoi j'ai construit un pont explicite entre les deux classes. L'algèbre, elle, est différente : les structures algébriques de douzième (groupes, anneaux, corps, polynômes) forment un bloc cohérent en soi, avec des liens clairs entre elles, mais n'ont aucun rapport avec l'algèbre linéaire

de onzième. Les deux moitiés de l'algèbre sont des mondes séparés, et j'ai choisi de les traiter comme tels.

À propos des méthodes. J'ai mêlé, délibérément, deux perspectives. D'une part, les techniques que l'on rencontre aux olympiades de Roumanie, de l'épreuve locale jusqu'à l'épreuve nationale. D'autre part, certaines méthodes que j'ai rencontrées durant mes deux premières années d'études supérieures dans le système CPGE (classes préparatoires aux grandes écoles) en France, fonctions génératrices, comparaisons série-intégrale, asymptotique par les singularités, et que j'ai trouvées parfaitement utilisables au niveau de l'olympiade, souvent plus claires et plus puissantes que les approches ad hoc. Le pont entre la onzième et la douzième est l'endroit où ces deux perspectives se rencontrent le plus naturellement.

À propos du programme. Les niveaux $1 \cdot 2 \cdot 3$ marquent la *difficulté*, non pas strictement le programme de l'épreuve correspondante. J'ai inclus, délibérément, à un niveau donné, des problèmes qui utilisent des concepts ne figurant pas officiellement au programme de cette épreuve : par exemple des problèmes portant sur les dérivées aux Niveaux 1 et 2, bien que, n'étant pas au programme des épreuves locale et départementale, ils ne puissent pas y tomber effectivement. Je les ai conservés comme un exercice du type "et si jamais cela tombait à une épreuve locale ou départementale" : l'idée de base est accessible à ce niveau aussi, et s'y entraîner ne peut pas nuire.

À propos de la rédaction. J'ai essayé de rédiger comme on l'exige à l'olympiade : j'énonce et je démontre chaque lemme que j'utilise, je découpe les solutions en étapes explicitement nommées, je vérifie les hypothèses avant d'appliquer un théorème et j'indique clairement où se termine chaque argument. La rédaction n'est pas un caprice : en compétition, elle fait la différence entre une bonne idée et un score complet.

À propos des problèmes. Presque tous sont de mon invention. Les exceptions (les problèmes classiques et ceux repris de compétitions) sont indiquées explicitement. J'ai également essayé d'inclure au moins un problème pour chaque résultat énoncé dans la partie théorique : un lemme qui ne "travaille" nulle part ne mérite pas d'être retenu.

Vlad-Ștefan Constantinescu
Bucarest, 2026

Remerciements

Avant tout, je voudrais remercier un vieil ami, **Deluen Eliaz**, qui a été mon professeur en classes de huitième et neuvième au Lycée Français “Anna de Noailles”. Il a été le premier à croire en mon talent mathématique, et cela compte plus que n’importe quelle leçon.

Je remercie **monsieur Cristian Teodor Mangra**, mon professeur de mathématiques au Collège National “Tudor Vianu” en classes de dixième à douzième. Il a toujours été notre allié et nous a soutenus dans notre préparation.

Je remercie **monsieur Flavian Georgescu** et **monsieur Traian Preda**, qui m’ont préparé pour l’olympiade et m’ont ouvert l’accès à des techniques et des perspectives que les manuels n’abordent pas.

Je remercie **monsieur Cătălin Gherghe**, président de la Société de Mathématiques de Roumanie, organisateur de l’Olympiade nationale de mathématiques et de l’Équipe olympique des seniors. Je le remercie non seulement pour l’effort d’organisation qu’il fournit, mais aussi pour la préparation qu’il nous offre au Cercle d’Excellence.

Première partie

ANALYSE MATHÉMATIQUE

Rédaction et problèmes de constructions

La rédaction en analyse : du dessin à la démonstration

Comment rédiger une solution, en général

Avant tout ce qui est propre à l'analyse, les règles qui valent des points à *toute* épreuve :

1. **Annonce le plan et la structure.** La première phrase dit ce que tu vas démontrer et, idéalement, comment ("Montrons que f est constante, en deux étapes : d'abord qu'elle est périodique avec des périodes arbitrairement petites, puis la conclusion par continuité."). Les étapes longues deviennent des *lemmes nommés*, le correcteur note sur ton schéma, pas sur le sien.
2. **Chaque affirmation a une justification :** un calcul affiché ou un *théorème nommé, avec les hypothèses vérifiées explicitement* ("f est continue sur $[0,1]$ comme somme de fonctions continues, donc par Weierstrass elle atteint son maximum"). "On voit que" et "évident" sont des points

perdus, si c'est évident, la démonstration est courte ; écris-la.

3. **Les objets s'introduisent avant d'être utilisés**, avec leur quantificateur correct : "Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire", "*il existe* N tel que...", "*on choisit* $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$". L'ordre des quantificateurs est un contenu mathématique, non un style, les inverser, c'est la différence entre continuité et continuité uniforme.
4. **Les notations : une fois définies, jamais recyclées.** N'utilise pas n à la fois pour le rang de la suite et pour le degré du polynôme ; ne redéfinis pas le c du théorème de la moyenne en un autre c trois lignes plus bas.
5. **Les cas s'épuisent au grand jour.** Énumère-les ("Cas 1 : $f'(x_0) > 0$..."), et écris "le cas 2 est symétrique, en remplaçant max par min" *uniquement* si la symétrie est réelle et vérifiable en 10 secondes.
6. **Pour "déterminez..." : deux moitiés obligatoires.** *La vérification* (les objets trouvés satisfont bien la condition, calcul explicite) et *la classification* (il n'y en a pas d'autres). Le barème les sépare presque toujours ; ne rendre que la devinette vérifiée, c'est ne rendre que la moitié du problème.
7. **Le brouillon n'entre pas dans la copie.** Le chemin par lequel tu as trouvé la solution (dessins, petits cas, heuristiques, l'équation-boussole de l'asymptotique) reste au brouillon ; au propre n'entre que la chaîne logique, dans l'ordre logique, non dans l'ordre de la découverte. Une page complète vaut mieux que trois pages de recherches.
8. **Les 5 dernières minutes : l'audit.** Les bornes d'intervalle et les hypothèses de type fermé/ouvert, les cas dégénérés ($n = 1$, la fonction constante, $a = b$), les constantes d'intégration, les signes lors des élévations au carré, exactement les endroits des listes de pièges ci-dessous.

La méthode graphique : du dessin à la démonstration

De nombreux problèmes d'analyse se *résolvent* ainsi : on fait un graphique, on interprète graphiquement la condition de l'énoncé, on "voit" la solution sur le dessin, puis on revient au problème. C'est la bonne méthode pour **trouver** la solution, le graphique est le générateur d'intuition le plus rapide de l'analyse. Mais c'est là aussi le piège : **une solution rédigée sur un dessin reçoit, en général, au plus 2 points sur 7.** Le graphique est un échafaudage, non une démonstration : le jury ne note pas "on le voit sur la figure", mais la chaîne de théorèmes qui remplace la figure.

Le bon flux de travail se fait donc en *deux passes* :

1. **La passe de découverte (au brouillon) :** on dessine, on interprète géométriquement la condition (une inégalité = une position relative de graphes ; une équation = une intersection ; une moyenne = une aire ou une pente), on devine la configuration et la solution.
2. **La passe de rédaction (au propre) :** on traduit *chaque* affirmation visuelle en un énoncé de théorème. Le dictionnaire standard : "le graphe monte" → monotonie démontrée à partir du signe de la dérivée (sur un *intervalle* !) ; "les graphes se coupent" → Cauchy-Bolzano/Darboux sur une fonction différence, avec les signes aux extrémités calculés explicitement ; "le graphe est au-dessus de la tangente/de la corde" → convexité, avec l'inégalité de la tangente ou le lemme des pentes cité ; "il s'approche de..." → limite avec ε ou encadrement ; "l'aire/la pente moyenne" → théorème de la moyenne ou Lagrange, avec les hypothèses vérifiées. Si une proposition de la rédaction n'a derrière elle ni un théorème de la fiche ni un calcul, elle n'existe pas pour le correcteur.

Exemple

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables, à dérivée continue, telles que

$$f(x) = \max\big(f'(x),\ x+1\big), \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Passe 1 (la découverte, sur le dessin).

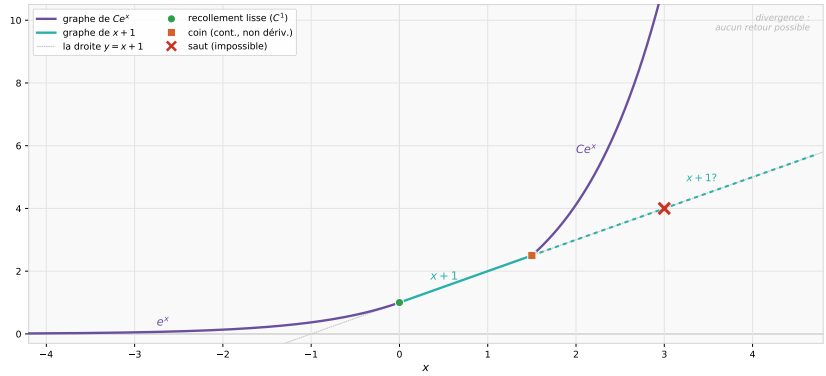
Observation clé. Par la continuité de f' : si $f'(x_0) > x_0 + 1$ strictement, alors $f'(x) > x + 1$ sur tout un intervalle autour de x_0 (et réciproquement). Donc sur chaque intervalle maximal on a exactement l'une des situations :

- $f'(x) > x + 1$: alors $f(x) = f'(x)$, donc $f' = f$, c'est-à-dire $f(x) = Ce^x$ sur cet intervalle ;
- $f'(x) \leq x + 1$: alors $f(x) = x + 1$, donc $f'(x) = 1$, ce qui implique $f'(x) < x + 1$ (correct si $x \neq 0$), donc $f(x) = x + 1$.

Autrement dit, f est **par morceaux** : elle alterne entre des tronçons exponentiels Ce^x et des tronçons linéaires $x + 1$.

Que pourrait-il se passer ? Le graphique ci-dessous montre une fonction qui alterne linéaire → exponentiel → linéaire → exponentiel → linéaire. La question : ces morceaux peuvent-ils se "recoller" de façon cohérente ?

Pourquoi l'alternance ne fonctionne-t-elle pas ? À une transition de exponentiel → linéaire, il faut que $Ce^{x_1} = x_1 + 1$ et $Ce^{x_1} = 1$ (recollement C^1), c'est-à-dire précisément la tangence $e^{x_1} \geq x_1 + 1$, avec égalité. L'unique



Une fonction par morceaux candidate : elle alterne entre $y = x + 1$ (bleu) et Ce^x (violet). Les flèches indiquent les points de transition. La clé : une fois que l'exponentielle dépasse la droite, elle ne peut plus y revenir, car $Ce^x > x + 1$ pour x suffisamment grand.

solution : $C = 1$, $x_1 = 0$. Mais pour $x > 0$, $e^x > x + 1$ strictement, donc l'exponentielle ne redescend jamais vers la droite. Toute transition après $x = 0$ est impossible. Il ne reste que : la famille Ce^x (avec $C \geq 1$, pour être toujours $\geq x + 1$) et la solution recollée une seule fois en $x = 0$.

Passe 2 (la rédaction). Soit $U = \{x : \ f'(x) < x + 1\}$, ensemble *ouvert*, car f' est **continue** (c'est ici que l'on utilise l'hypothèse !).

Sur U : $f(x) = \max(f'(x), x+1) = x+1$, donc, U étant ouvert, $f'(x) = 1$ sur U. Mais alors la condition d'appartenance $f'(x) < x+1$ devient $1 < x+1$, c'est-à-dire $x > 0$: ainsi $U \subseteq (0, \infty)$.

Cas $U = \varnothing$: alors $f'(x) \geq x + 1$ partout, donc $f(x) = f'(x)$ pour tout x. L'équation $f' = f$ donne $f(x) = Ce^x$ (via la fonction auxiliaire $f(x)e^{-x}$, comme dans la section sur les équations différentielles). Il reste la contrainte $Ce^x \geq x + 1$ pour tout x : pour $C \leq 0$ elle échoue en $x = 0$; pour $C > 0$, le minimum de la fonction $Ce^x - x - 1$ est atteint en $x = -\ln C$ et vaut $\ln C$, donc la contrainte équivaut à $C \geq 1$. On obtient la famille $f(x) = Ce^x$, $C \geq 1$.

Cas $U \neq \varnothing$: soit (a, b) une composante de U, avec $0 \leq a < b \leq \infty$. Sur (a, b), $f' \equiv 1$; par la continuité de f', $f'(a) = 1$. Mais $a \notin U$, donc $f'(a) \geq a + 1$, c'est-à-dire $1 \geq a + 1$, donc $a \leq 0$: combiné à $a \geq 0$, il en résulte $a = 0$. Si $b < \infty$: de même $f'(b) = 1 \geq b + 1$, donc $b \leq 0$, contradiction avec $b > 0$. Ainsi $U = (0, \infty)$, et $f(x) = x + 1$ sur $[0, \infty)$ (avec $f(0) = 1$ par continuité). Sur $(-\infty, 0]$, le complémentaire de U, on a $f = f'$ (comme ci-dessus), donc $f(x) = Ce^x$ là ; $f(0) = 1$ donne $C = 1$. Vérifications finales : le recollement est de classe C^1 ($f'(0-) = e^0 = 1 = f'(0+)$), et sur $(-\infty, 0)$ la contrainte $f'(x) = e^x \geq x + 1$ est classique. ■

Réponse : $f(x) = Ce^x$ avec $C \geq 1$, *ou* $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0 \\ x+1, & x \geq 0. \end{cases}$

Ce que la rédaction a apporté : le dessin a *deviné* les deux familles, mais seul l'argument avec l'ensemble ouvert U démontre qu'**il n'y en a pas d'autres**, exactement la partie invisible sur le graphique. À remarquer aussi le dictionnaire à l'œuvre : "la tangence de e^x à la droite" $\to$ le minimum de $Ce^x - x - 1$ calculé avec la dérivée ; "le recollement fonctionne" $\to$ la vérification explicite C^1 ; "à partir de 0 seulement la droite" $\to$ l'argument avec les extrémités des composantes de U.

Pièges fréquents (onzième)

1. Le passage à la limite dans une récurrence exige *d'abord* la démonstration de la convergence ; $\ell = f(\ell)$ seule ne prouve rien.
2. Lagrange/Rolle exigent la continuité sur l'intervalle *fermé* et la dérivabilité sur l'intervalle *ouvert*, vérifier explicitement les hypothèses.
3. Les conséquences de Lagrange (monotonie à partir du signe de la dérivée) ne sont valables que sur des *intervalles*, non sur des réunions d'intervalles (ex. $-1/x$ a une dérivée positive sur $\mathbb{R}^*$ mais n'est pas croissante sur $\mathbb{R}^*$).
4. L'Hôpital : vérifier la forme indéterminée et l'existence de la limite du rapport des dérivées ; l'implication ne s'inverse pas.
5. Darboux n'implique pas la continuité ; la continuité implique Darboux.
6. $a_{n+1} - a_n \to 0$ n'implique pas la convergence ; $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$ ne décide rien.
7. Les points d'extremum peuvent aussi se trouver aux extrémités du domaine ou en des points de non-dérivabilité, Fermat ne couvre que les points intérieurs où la dérivée existe.
8. Pour les limites avec lim sup / lim inf ou des sous-suites : la convergence de (x_{2n}) et (x_{2n+1}) doit donner la *même* limite.

Pièges avec les intégrales (douzième)

1. "Continue $\iff$ admet des primitives" est faux dans les deux raffinements : la continuité est suffisante mais non nécessaire ; Darboux est nécessaire mais non suffisante.
2. Leibniz-Newton exige que G soit une primitive sur *tout* l'intervalle, attention aux primitives "par morceaux" avec des constantes mal ajustées

au recollement (classique pour $\int \frac{dx}{2+\cos x}$ avec la substitution $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, discontinue en π).

3. Lors d'un changement de variable pour les intégrales définies, les bornes changent aussi ; u doit être dérivable à dérivée continue sur l'intervalle d'intégration.
4. $\int_a^b f = 0$ n'implique pas $f \equiv 0$ sans les hypothèses $f \geq 0$ *et* f continue.
5. L'intégrabilité de Riemann exige la bornitude ; $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ est une intégrale *impropre*, non une intégrale de Riemann ordinaire, elle se traite par une limite.
6. Dans les sommes de Riemann, la fonction doit être intégrable sur l'intervalle fermé ; les singularités aux extrémités (comme pour $x^{-\alpha}$) demandent un argument supplémentaire de troncature.

Constructions : quelles fonctions essayer

Note : cette section figure au début parce qu'elle est une *attitude*, non un chapitre, elle sert partout. Ses exemples invoquent des notions traitées rigoureusement plus loin (dérivées, équations différentielles, recollements sur $\mathbb{Q}$, intégrales impropres) ; à une première lecture on peut sauter les démonstrations, en retenant les réflexes.

Les problèmes de constructions à l'ONM sont souvent du type *"démontrez qu'il existe une fonction ayant les propriétés..."* ou *"donnez un exemple de fonction qui..."*. L'idée principale : reconnaître rapidement **quelle forme de fonction a de grandes chances de fonctionner**, puis déterminer les paramètres par un calcul direct.

Principes généraux de construction

Les problèmes de construction se ressemblent dans toutes les branches, combinatoire, théorie des nombres, analyse, et possèdent un folklore commun de stratégies (adapté ici d'après le document "Olympiad Constructions" de Cody Johnson et la littérature de combinatoire olympique) :

1. **Les petits cas, toujours en premier.** Résous le problème pour $n = 1, 2, 3, 4$: les petits cas te font deviner la réponse (le minimum/maximum,

la forme) et, plus important, te montrent le *motif* selon lequel s'assemble la construction générale. L'équivalent en analyse : essaie d'abord sur les exemples-jouets du catalogue.

2. **Construction par récurrence/assemblage.** À partir d'une construction de taille n on en fabrique souvent une de taille $n+1$ ou $2n$ (on double, on recolle, on ajoute une pièce). En analyse : le recollement de fonctions par morceaux (e^x avec $x+1$ à l'ONM 1994), les suites de fonctions définies récursivement.
3. **Démontre d'abord, cherche ensuite : le rétrécissement par contraintes.** Avant de chercher à l'aveugle, démontre des *propriétés obligatoires* de toute solution (en analyse : signes, monotonies, valeurs forcées en certains points). Chaque contrainte réduit l'espace de recherche, et souvent les contraintes, cumulées, *dictent* la construction. C'est exactement le "la structure devine" de nos sections : pour $(f')^2 + 1 = f$, la comparaison des degrés a tout décidé avant toute tentative.
4. **Pour "démontrez ou réfutez" : attaque sérieusement la variante NON.** Essaie vraiment de démontrer l'impossibilité ; *l'endroit précis où ton argument échoue* est la carte vers la construction, c'est là qu'est la liberté qu'une construction doit exploiter. Et la discipline de concours : si pendant la première moitié du temps tu n'as pas démontré "oui", consacre la seconde moitié au "non", sans osciller.
5. **Le principe de simplicité.** S'il existe une construction, il en existe presque sûrement une faite de *pièces simples* : mouvements élémentaires, blocs répétés, fonctions du catalogue. Ne cherche pas d'objets exotiques avant d'avoir épuisé les combinaisons banales, c'est la morale de tous les exemples de la fiche, où les réponses ont été e^x, $|x|$, Dirichlet, $\sqrt{x^2+\varepsilon}$, jamais quelque chose d'inédit.

Le reste de la section applique ces principes au cas particulier de l'analyse : quelles *familles de fonctions* jouent le rôle des "pièces simples".

Réflexe 1 : pour les équations fonctionnelles ou différentielles, essaie d'abord un polynôme

Le premier réflexe est de supposer que la fonction est un polynôme et de voir *quel degré elle devrait avoir* : la comparaison des degrés dit très vite s'il y a la moindre chance. Les règles de degré : la dérivation abaisse le degré de 1 ; l'élévation au carré le double ; la composition les multiplie.
Exemple. Construire f telle que $\big(f'(x)\big)^2 + 1 = f(x)$ pour tout x.
Étape 1 (le degré). Si f est un polynôme de degré n : f' est de degré

$n-1$, donc $(f')^2$ est de degré $2(n-1)$. L'égalité des degrés exige $2(n-1)=n$, c'est-à-dire $n=2$. On essaie $f(x)=ax^2+bx+c$.
Étape 2 (calcul direct). $f'(x)=2ax+b$, donc

$$(2ax+b)^2+1=ax^2+bx+c \quad\Longleftrightarrow\quad 4a^2x^2+4abx+b^2+1=ax^2+bx+c,$$

et l'identification des coefficients donne le système $4a^2=a$, $4ab=b$, $b^2+1=c$.
Étape 3 (la résolution). De la première : $a=0$ (on perd le degré 2) ou $a=\frac{1}{4}$. Pour $a=\frac{1}{4}$, la deuxième équation devient $b\cdot 0=0$, donc b est *arbitraire*, et $c=b^2+1$:

$$\boxed{f(x)=\frac{x^2}{4}+bx+b^2+1, \qquad b\in\mathbb{R}.}$$

Vérification : $f'(x)=\frac{x}{2}+b$, $\left(\frac{x}{2}+b\right)^2+1=\frac{x^2}{4}+bx+b^2+1=f(x)$. ✓

Réflexe 2 : la condition $f>0$ sur tout le domaine

Lorsque l'énoncé exige $f(x)>0$ pour tout x du domaine (généralement $(0,\infty)$), les formes naturelles à tester sont

$$f(x)=c_2\,x^{c_1} \qquad \text{et} \qquad f(x)=b\cdot a^x,$$

avec $c_2, b>0$, les puissances et les exponentielles sont les fonctions positives "canoniques" et se comportent parfaitement lors des multiplications, compositions et dérivations (elles restent dans la même famille). Ce n'est pas un hasard : ce sont exactement les solutions des équations fonctionnelles classiques (la section sur les équations de Cauchy), donc toute condition à structure multiplicative les sélectionnera.

Réflexe 3 : discontinuités contrôlées, fonctions de type Dirichlet

Lorsqu'il faut construire une fonction avec un nombre *contrôlé* de points de discontinuité ou de non-dérivabilité, l'idée standard est de la définir différemment sur $\mathbb{Q}$ et sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. L'outil théorique figure déjà dans la fiche (la sous-section "Fonctions définies par cas sur $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$") : pour g, h continues, la fonction recollée est **continue exactement aux points où**

$g(x) = h(x)$, et dérivable exactement là où les branches se touchent, dérivées comprises. La construction devient ainsi une *équation* : tu veux une discontinuité exactement sur un ensemble S ? Choisis des branches qui coïncident exactement sur le complémentaire de S.

Réflexe 4 : quelles fonctions classiques vérifiant l'hypothèse est-ce que je connais ?

Avant d'inventer quelque chose de compliqué, pose-toi la question : *"quel exemple ayant ces propriétés est-ce que je connais déjà ?"* Les sous-questions de type "donnez un exemple / en résulte-t-il que... ?" à l'olympiade se résolvent presque toujours à partir d'un court catalogue, combiné à de petits ajustements (translations, multiplications par des constantes, $x^2 + \varepsilon$ au lieu de x^2) :

1. **Dirichlet** $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$, discontinue partout ; $x \cdot \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$, continue seulement en 0 ; x sur $\mathbb{Q}$, $x+1$ ailleurs, discontinue partout mais avec des limites "par branches".
2. $|x|$, continue, non dérivable en un point ; $\sqrt{x^2 + \varepsilon}$, la fonction lisse qui l'approche.
3. $\sin \frac{1}{x}$, bornée sans limite en 0 ; $x \sin \frac{1}{x}$, continue, non dérivable en 0 ; $x^2 \sin \frac{1}{x}$, dérivable à dérivée discontinue.
4. x^3, strictement croissante à dérivée nulle en un point ; $x + 2 \sin x$, dérivée qui change de signe une infinité de fois, mais la fonction $\to \infty$.

Morale : pour les questions b) de type "en résulte-t-il que... ?", la réponse "non" se démontre avec un membre du catalogue, ajusté au minimum.

Exemple

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pour laquelle il existe une fonction dérivable $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et une suite (a_n) de nombres strictement positifs, convergeant vers 0, telles que

$$g'(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{f(x + a_n) - f(x)}{a_n} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

a) Donner un exemple d'une telle f qui n'est dérivable en aucun point.

Solution. Pensons simplement : il nous faut une fonction non dérivable partout, le premier candidat du catalogue est Dirichlet, $f = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$. Vérifions que cela marche avec $a_n = \frac{1}{n}$: si $x \in \mathbb{Q}$, alors $x + \frac{1}{n} \in \mathbb{Q}$; si $x \notin \mathbb{Q}$, alors

$x + \frac{1}{n} \notin \mathbb{Q}$, l'addition d'un rationnel *préserve la classe*. Donc

$$f\Big(x + \frac{1}{n}\Big) = f(x) \quad \forall x, n \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{f(x + a_n) - f(x)}{a_n} = 0 \to 0,$$

de sorte que l'hypothèse est satisfaite avec g constante ($g' \equiv 0$). Et f est discontinue en tout point (les branches constantes 1 et 0 ne se touchent nulle part, corollaire du recollement), donc non dérivable partout. ■

À retenir : toute la solution réside dans le choix de la suite a_n *rationnelle*, la limite sur une suite particulière ne voit pas la structure fine de la fonction. C'est précisément ce phénomène qui fait de la question b) du problème (si f est *continue*, alors elle est dérivable) la partie difficile.

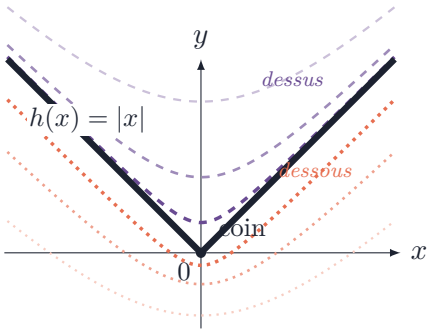
Exemple : ONM 2026, épreuve nationale, onzième, Problème 1b)

Énoncé. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et (f_n), (g_n) deux suites de fonctions dérivables ayant la propriété que $f_n(x) < h(x) < g_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, et que $g_n(x) - f_n(x) \to 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction h est-elle nécessairement dérivable ?

Réponse : NON.

J'ai participé à l'ONM 2026 et voici le raisonnement que j'ai suivi pour ce problème.

Comment deviner le contre-exemple. Pendant le concours, j'ai tracé un graphique. Les conditions du problème disent que h est prise entre deux familles de fonctions dérivables qui l'écrasent, sur le graphique, cela signifie deux "pinces" de courbes lisses qui descendent et montent vers h des deux côtés. La seule fonction continue et non dérivable que je connaissais était $h(x) = |x|$, elle a un coin en 0, mais elle est par ailleurs parfaitement inoffensive. Je l'ai dessinée et j'ai cherché des yeux des courbes dérivables, au-dessus et au-dessous, qui la serreraient :



La forme des courbes du dessus m'a immédiatement suggéré une hyperbole lissée. Une fois h choisi et ayant observé que les courbes ressemblent à $\sqrt{x^2+\varepsilon}$, j'ai formellement choisi :

La construction. On pose

$$g_n(x) = \sqrt{x^2 + \tfrac{1}{n}}, \qquad f_n(x) = \sqrt{x^2 + \tfrac{1}{n}} - \sqrt{\tfrac{2}{n}}.$$

Dérivabilité : $x^2 + \frac{1}{n} > 0$, donc les deux sont C^∞ sur $\mathbb{R}$.

L'encadrement $f_n < h < g_n$ *:* L'inégalité $g_n > |x|$ est claire. L'inégalité $f_n < |x|$ revient à $\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{\frac{2}{n}} < |x|$, c'est-à-dire (en élevant au carré, les deux membres étant positifs pour n grand) :

$$x^2 + \frac{1}{n} < x^2 + 2|x|\sqrt{\tfrac{2}{n}} + \frac{2}{n} \quad \Longleftrightarrow \quad 0 < 2|x|\sqrt{\tfrac{2}{n}} + \frac{1}{n},$$

vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Le resserrement : $g_n(x) - f_n(x) = \sqrt{\frac{2}{n}} \to 0$ uniformément.

Toutes les hypothèses sont satisfaites, mais $h = |x|$ n'est pas dérivable en 0. ■

Deuxième partie

SIX PROBLÈMES DU LIVRE

Le niveau 1 correspond à l'étape locale de l'olympiade roumaine, le niveau 2 à l'étape départementale, le niveau 3 à l'étape nationale. Chaque énoncé est suivi de sa solution complète, comme dans le livre.

Problème N1.18

Déterminez toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ayant la propriété que

$$f(x+1) = f(x) + 1 \qquad \text{et} \qquad f\big((x+1)^2\big) = f(x^2) + 2x + 1$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Solution. On écrit $f(x) = x + g(x)$ et on reformule les conditions :

(1) $g(x+1) = g(x)$ pour tout x (d'après la première condition), donc g est *continue et périodique* de période 1.

(2) $g\big((x+1)^2\big) = g(x^2)$ pour tout x (d'après la seconde condition, après simplification).

Il faut montrer que g est constante. En remplaçant x par $\sqrt{t}-1$ (pour $t > 0$) dans (2) :

$$g(t) = g\Big((\sqrt{t}-1)^2\Big), \qquad t > 0. \tag{$*$}$$

Étape 1. Pour $t > 1$: $\sqrt{t} > 1$, donc $(\sqrt{t}-1)^2 < t$ et la suite $t_0 = t$, $t_{n+1} = (\sqrt{t_n}-1)^2$ est strictement décroissante, donc $g(t) = g(t_1) = g(t_2) = \cdots$ Comme la suite converge vers un point fixe de $\varphi(t) = (\sqrt{t}-1)^2$, qui a les points fixes 0 et $\frac{1}{4}$ (les solutions $\varphi(t) = t$, c'est-à-dire $\sqrt{t}-1 = \pm\sqrt{t}$), et 0 est le point fixe stable, $t_n \to 0$. Par continuité $g(t) = g(0)$.

Étape 2. Par périodicité, $g(t) = g(0)$ pour tout $t > 0$ implique $g = g(0)$ sur tout $\mathbb{R}$.

Par conséquent $g \equiv c$ (constante), et

$$\boxed{f(x) = x + c, \qquad c \in \mathbb{R}.}$$

Vérification. $f(x+1) = x+1+c = (x+c)+1 = f(x)+1$ ✓ ; $f((x+1)^2) = (x+1)^2 + c = x^2 + 2x + 1 + c = f(x^2) + 2x + 1$ ✓.

Problème N2.10

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dérivable. Montrez qu'il existe $c \in (0,1)$ tel que

$$\pi\,(1+c^2)\,f'(c) \;=\; 4\big(f(1) - f(0)\big).$$

Solution. On applique le théorème de Cauchy, des accroissements finis généralisés (Théorème 2.73), au couple (f, g), où

$$g(x) = \arctan x.$$

La fonction g est dérivable sur $[0,1]$, avec $g'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \neq 0$ sur $(0,1)$. Le théorème donne un $c \in (0,1)$ tel que

$$\frac{f(1)-f(0)}{g(1)-g(0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \Longrightarrow \frac{f(1)-f(0)}{\frac{\pi}{4}-0} = (1+c^2)\, f'(c),$$

c'est-à-dire exactement l'identité demandée.

Remarque 1. Le choix de g est un "changement d'horloge" : Lagrange (2.71) est le cas particulier $g(x) = x$. Avec d'autres horloges on obtient d'autres identités, par exemple $g(x) = x^2$ sur $[a,b] \subset (0,\infty)$ donne $f(b) - f(a) = \dfrac{f'(c)}{2c}\,(b^2 - a^2)$.

Remarque 2. On ne peut rien dire sur *la position* de c : pour $f = g = \arctan$ tout c convient, tandis que pour $f(x) = x$ le point est unique ($\pi(1+c^2) = 4$, donc $c = \sqrt{4/\pi - 1} \approx 0{,}52$).

Problème N2.15

Existe-t-il des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodiques avec des périodes aussi petites qu'on veut ? Si de plus f est continue, est-ce encore possible ?

Solution. **Sans continuité : OUI.** La fonction de Dirichlet

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

a tout rationnel $r > 0$ pour période : $f(x+r) = f(x)$ pour tout x, car $x \in \mathbb{Q} \iff x + r \in \mathbb{Q}$. Comme $\mathbb{Q}$ est dense, il existe des périodes $r > 0$ aussi petites qu'on veut.

Avec continuité : NON ; f est constante. Soit f continue avec des périodes $p_n \to 0$, $p_n > 0$. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. Par continuité en x il existe $\delta > 0$ tel que $|f(z) - f(x)| < \varepsilon$ pour $|z - x| < \delta$. On choisit n tel que $p_n < \delta$. On prend $k = \lfloor (y-x)/p_n \rceil$ (arrondi à l'entier le plus proche) ; alors $|y - kp_n - x| < p_n < \delta$. Par périodicité $f(y) = f(y - kp_n)$, donc $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$. Comme ε, y sont arbitraires, f est constante.

Problème N2.16

(a) Existe-t-il des fonctions continues dérivables *uniquement* aux points rationnels ?

(b) Existe-t-il des fonctions continues dérivables *uniquement* aux points irrationnels ?

Solution. **(a) NON.** Si f est continue et dérivable en tout rationnel, les ensembles

$$A_n = \{x \in \mathbb{R} : \, |f(x+h) - f(x)| \le n|h| \text{ pour tout } |h| \le 1/n\}$$

sont *fermés* et recouvrent $\mathbb{Q}$ (la dérivabilité implique la limitation locale du quotient différentiel). Par le théorème de Baire ($\mathbb{R}$ est un espace de Baire complet), comme $\mathbb{Q} \subseteq \bigcup_n A_n$ est dense, au moins un A_{n_0} est d'intérieur non vide : il contient un intervalle (c, d). Sur (c, d), la fonction f est lipschitzienne de constante n_0. Par le théorème de Lebesgue (les fonctions lipschitziennes sont dérivables presque partout), f est dérivable en presque tout point de (c, d), donc en particulier en des points irrationnels. Contradiction.

(b) OUI, et c'est remarquable. Soit $(q_n)_{n\ge1}$ une énumération des rationnels. La fonction

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \, |x - q_n|^{1/2}$$

est *continue* (convergence uniforme sur tout compact). En tout rationnel q_k : le terme $n = k$ contribue $2^{-k}|x - q_k|^{1/2}$, non dérivable en q_k (le quotient $|h|^{1/2}/h = |h|^{-1/2} \operatorname{sgn} h \to \pm\infty$) ; la somme des autres termes *est* dérivable en q_k, donc f n'est pas dérivable en q_k. En tout irrationnel α : chaque terme est dérivable en α, et la série des dérivées converge absolument (les coefficients 2^{-n} décroissent géométriquement face à $|\alpha - q_n|^{-1/2}$ qui sont contrôlables), donc f est dérivable en α.

Remarque Le résultat (b) est surprenant : l'ensemble des irrationnels *peut* être l'ensemble exact de dérivabilité d'une fonction continue. Le résultat (a) montre que $\mathbb{Q}$, bien qu'il soit F_σ (réunion dénombrable d'ensembles fermés), ne peut être l'ensemble de dérivabilité d'aucune fonction continue.

Problème N3.8

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable ayant la propriété

$$f(x) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad f'(x) = 0 \qquad (\text{pour tout } x \in \mathbb{R}).$$

Montrez que toute valeur $v \neq 1$ est prise par f en au plus deux points.

Solution. On note

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \; f(x) = 1\} = \{x \in \mathbb{R} : \; f'(x) = 0\}$$

l'ensemble commun de l'hypothèse (les deux descriptions coïncident, précisément par l'équivalence donnée).

Étape 1 : A est un intervalle fermé. La fermeture est immédiate : $A = f^{-1}\big(\{1\}\big)$, et f est continue (étant dérivable).

Montrons que A n'a pas de "trous". Soient $x_1 < x_2$ deux points de A ; démontrons que $f \equiv 1$ sur $[x_1, x_2]$, d'où $[x_1, x_2] \subseteq A$.

La fonction f est continue sur le compact $[x_1, x_2]$, elle y atteint donc ses bornes (Weierstrass, Théorème 2.54) : soit M le maximum et m le minimum.

Supposons $M > 1$. Comme $f(x_1) = f(x_2) = 1 < M$, le maximum *n'est pas* atteint aux extrémités, il est donc atteint en un point *intérieur* $d \in (x_1, x_2)$. Étant un point d'extremum local intérieur d'une fonction dérivable, le théorème de Fermat (Théorème 2.68) donne $f'(d) = 0$; par hypothèse, alors $f(d) = 1$. Mais $f(d) = M > 1$, contradiction. Ainsi $M \leq 1$.

Symétriquement, si $m < 1$, le minimum est atteint en un point intérieur e, où Fermat donne $f'(e) = 0$, donc $f(e) = 1$; or $f(e) = m < 1$, contradiction. Ainsi $m \geq 1$.

De $m \geq 1$ et $M \leq 1$ il résulte $f \equiv 1$ sur $[x_1, x_2]$. Par conséquent A est un intervalle (éventuellement vide, réduit à un point, une demi-droite ou même $\mathbb{R}$).

Étape 2 : le complémentaire a au plus deux composantes. Étant un intervalle *fermé*, le complémentaire $\mathbb{R} \setminus A$ est une réunion d'au plus *deux* intervalles ouverts, une "demi-droite" à gauche de A et une à droite :

$$\mathbb{R} \setminus A \;\subseteq\; (-\infty, \alpha) \;\cup\; (\beta, +\infty),$$

où $\alpha = \inf A$ et $\beta = \sup A$ (si $A = \emptyset$, le complémentaire est $\mathbb{R}$ lui-même, c'est-à-dire une seule composante ; si $A = \mathbb{R}$, le complémentaire est vide).

Étape 3 : sur chaque composante, f est strictement monotone. Soit J l'une de ces composantes (un intervalle ouvert). Sur J, la dérivée f' *ne s'annule pas* : un zéro de f' serait, par hypothèse, un point où $f = 1$, donc un point de A, or $J \cap A = \emptyset$.

La dérivée a la propriété de Darboux (Théorème 2.74) : si elle prenait sur J à la fois des valeurs négatives et des valeurs positives, elle devrait passer par 0, ce qui est exclu. Ainsi f' garde un *signe constant* sur J, et par la conséquence du théorème de Lagrange (Théorème 2.71), f est strictement monotone sur J. En particulier, f est *injective* sur J : l'équation $f(x) = v$ a au plus une solution dans J.

Étape 4 : le comptage. Soit $v \neq 1$ et soit x une solution de l'équation $f(x) = v$. Alors $x \notin A$ (car sur A la fonction vaut $1 \neq v$), donc x appartient à l'une des au plus deux composantes de $\mathbb{R} \setminus A$. Par l'Étape 3, chaque composante contient au plus une solution. Par conséquent l'équation $f(x) = v$ a

$$\text{cel mult} \quad 2 \quad \text{solutions.}$$

Remarque 1 (la borne est atteinte). Pour $f(x) = 1 - x^2$ on a $f(x) = 1 \iff$

$x = 0$ et $f'(x) = -2x = 0 \iff x = 0$: l'hypothèse est vérifiée. Toute $v < 1$ est prise en exactement deux points, $x = \pm\sqrt{1-v}$. Donc "deux" ne peut pas être abaissé à "un" : une telle fonction *n'est pas* nécessairement injective.

Remarque 2 (quand f est-elle injective). De la démonstration se lit le critère exact : f est injective si et seulement si A a au plus un point *et* f' garde le *même* signe de part et d'autre de A. Comparez :

$$f(x) = 1 + x^3 \quad \text{(injective)}, \qquad f(x) = 1 - x^2 \quad \text{(non injective)},$$

toutes deux avec $A = \{0\}$, la seule différence est le signe de la dérivée autour de l'origine.

Remarque 3 (un piège). Il est tentant de croire que f ne peut pas *traverser* le niveau 1 : tout point avec $f(x) = 1$ étant un point critique, le graphe y a une tangente horizontale. Faux, la traversée peut se faire par *inflexion* : $f(x) = 1 + x^3$ passe de valeurs < 1 à des valeurs > 1, même si $f'(0) = 0$.

Remarque 4 (les extrema). Toujours par Fermat : *tout* extremum local d'une telle fonction a la valeur 1. Le niveau 1 est le seul auquel le graphe peut "se retourner", l'hypothèse contrôle exclusivement la structure de ce niveau, et rien d'autre.

Problème N3.10

Soit $a > 0$ et $f : [0, a) \to \mathbb{R}$ dérivable, avec $f(0) = 1$ et $f'(x) = f(x)^2$ pour tout $x \in [0, a)$. Montrez que $a \leq 1$ et que $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

Solution. *f ne s'annule pas.* Supposons le contraire et soit $c = \inf\{x \in [0, a) : f(x) = 0\}$; par continuité $f(c) = 0$, et $f > 0$ sur $[0, c)$ (car $f(0) = 1 > 0$). Sur $[0, c)$, la fonction $g = \dfrac{1}{f}$ est dérivable, avec

$$g' = -\frac{f'}{f^2} = -1;$$

alors $(g(x) + x)' = 0$ et, par le Corollaire 2.72, $g(x) + x$ est constante :

$$g(x) = g(0) - x = 1 - x \Longrightarrow f(x) = \frac{1}{1-x} \quad (0 \leq x < c).$$

Mais alors : si $c < 1$, la continuité donne $f(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-c} \neq 0$, contradiction ; et $c \geq 1$ est impossible, car $f(x) = \frac{1}{1-x} \to +\infty$ pour $x \to 1^-$, tandis que f, étant définie et continue en $1 \leq c < a$, devrait y avoir une limite finie. Donc f ne s'annule pas, reste strictement positive, et le raisonnement ci-dessus (valable maintenant sur tout le domaine où $f > 0$, c'est-à-dire sur tout $[0, a) \cap [0, 1)$) donne $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

$a \leq 1$. Si $a > 1$, le point $x = 1$ est dans le domaine ; f est continue en 1, mais $f(x) = \frac{1}{1-x} \to +\infty$ pour $x \to 1^-$, impossible pour une fonction à valeurs réelles. Donc $a \leq 1$ et $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ sur $[0, a)$.

Remarque. Le phénomène s'appelle *explosion en temps fini* : la croissance quadratique de $f' = f^2$ est trop rapide pour une solution globale, contrairement à $f' = f$, dont les solutions Ce^x vivent sur tout $\mathbb{R}$.

Fin de l'extrait gratuit

Cet extrait contient le premier chapitre du volume 1 et six problèmes avec leurs solutions.

Le volume complet contient 67 problèmes, chacun avec une solution complète et un niveau de difficulté de 1 à 3. La série compte quatre volumes : analyse de onzième, analyse de douzième, algèbre linéaire et algèbre abstraite, soit 261 problèmes au total.

L'Olympiade roumaine d'algèbre et d'analyse supérieures
Vlad-Ștefan Constantinescu

Livre broché et eBook, en français et en anglais :
https://www.amazon.fr/dp/B0HKGB6PJY

Vous pouvez partager ce fichier librement.