ROHS

Romanian Olympiad Hardness Scale

Vlad Constantinescu

Table des matières

1 Qu'est-ce que ROHS 3
2 Ce que j'ai repris de MOHS et ce qui diffère 7
3 Les trois étapes sur l'échelle 9
4 La position dans le sujet 10
5 Ce que signifie chaque niveau 11
Les tableaux de tous les problèmes 18

Qu'est-ce que ROHS

ROHS est une échelle de difficulté de 0 à 50, par pas de 5, pour les problèmes des trois étapes de l'Olympiade roumaine de mathématiques : l'étape locale (OLM), l'étape départementale, celle du județ (OJM), et l'étape nationale (ONM). L'idée vient de l'échelle MOHS d'Evan Chen pour les problèmes d'olympiades internationales. ROHS applique la même idée aux concours roumains et repose sur trois règles. (Les classes IX à XII sont les quatre années du lycée roumain.)

1. **Une échelle absolue.** La note dit à quel point le problème est difficile, quelle que soit la classe. Deux problèmes aussi difficiles l'un que l'autre ont la même note, qu'ils soient de classe IX ou de classe XII. On ne tient pas compte du fait que les élèves de classe IX sont plus jeunes. Un problème qui apparaît en classe IX et en classe X a la même difficulté dans les deux, sauf si sa solution utilise un programme vu en classe X et non en classe IX (on applique alors la règle de la théorie, ci-dessous).
2. **Une seule échelle pour toutes les étapes. 0** est le problème le plus facile jamais posé à l'OLM, et **50** est un problème qui *n'aurait pas dû être posé en concours*, parce qu'il ne départage personne. 50 ne veut pas dire « le problème le plus difficile » : il peut y avoir plusieurs problèmes à 50, même plus de quatre (exemple plus bas, au niveau 50). L'OJM se situe entre les deux, avec des chevauchements.
3. **La note est une opinion déclarée.** La difficulté, c'est à quel point il est difficile de trouver la solution, et la note exprime l'avis de l'auteur, pas une mesure.

Comment utiliser ce document. La partie la plus importante, ce sont les tableaux de la page 18 : on y cherche un problème par étape, année, classe et position, on y voit sa note, et c'est à partir de là que travaillent les élèves. En annexe, la note de chaque problème est un lien : si on clique dessus, on arrive directement à la discussion de ce problème sur AoPS (Art of Problem Solving), où l'on trouve l'énoncé et des solutions. Les liens existent pour l'OJM et l'ONM ; pour l'OLM il n'y a pas de discussions sur AoPS. Le reste explique ce que signifie la note et comment elle a été attribuée. En annexe, un problème marqué d'un astérisque utilise le programme de classes supérieures.

À propos du nom : ROHS signifie Romanian Olympiad Hardness Scale, et SDOM signifie Scara Dificultății Olimpiadelor de Matematică ; c'est le même nom, en anglais et en roumain, sur le modèle de MOHS. Dans ce

document j'utilise partout le nom ROHS.

D'où cela vient. ROHS est inspiré de MOHS. L'échelle d'Evan Chen m'a beaucoup aidé à savoir sur quoi travailler : choisir des problèmes adaptés à mon niveau et voir ce qui me manquait. ROHS veut faire la même chose pour les problèmes roumains d'olympiade.

> **La règle de base.** *La note d'un problème est égale à la difficulté de sa solution la plus facile.* Le problème est noté d'après le chemin le plus simple que trouverait un candidat préparé, et non d'après la solution officielle, qui peut être plus compliquée que nécessaire. La solution la plus simple est établie en combinant les solutions officielles, mes solutions et les solutions publiées sur AoPS. « A chain is as weak as its weakest link. » (Une chaîne n'est pas plus solide que son maillon le plus faible.) La règle s'applique aux *solutions* : la difficulté d'une solution ne peut pas être inférieure à celle de son étape la plus difficile, mais elle augmente aussi avec le nombre d'étapes. Par exemple, si la solution la plus simple compte 10 étapes de 5 ROHS chacune, le problème ne vaut pas 5, mais probablement autour de 20 ROHS.

Comment la théorie entre dans la note : cinq exemples

L'échelle ne suppose **pas** que tout le programme d'olympiade est connu. On tient compte du programme qu'utilise la solution la plus simple, pour qu'un problème qui n'est qu'un cas particulier d'une grande théorie ne paraisse pas difficile. **La règle de la théorie :** s'il existe une solution facile qui utilise une théorie difficile, la note *baisse*, d'autant plus que la théorie est connue et simple à appliquer, et la note finale est une moyenne entre le cas où la théorie est connue (où elle peut descendre jusqu'à 0) et le cas où elle ne l'est pas, pondérée selon le nombre de candidats qui la connaissent. Si la théorie est peu connue, la note monte. Une idée qu'il faut inventer à partir de zéro (par exemple le principe des tiroirs) n'est pas de la « théorie facile ». Le programme que je considère comme connu d'un candidat préparé est celui de mes livres de mathématiques pour l'olympiade, disponibles sur Amazon en anglais (`https://www.amazon.com/dp/B0HC7W95F6`) et en français (`https://www.amazon.fr/dp/B0HKGB6PJY`). (L'échelle MOHS a un tableau semblable, avec les connaissances supposées.) Cinq exemples, avec mes notes :

Exemple 1 (OJM 2026, classe XII, P4). Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue et bijective, telle que $f(x) < x$ pour tout $x \in (0,1)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note $f_n = f \circ f \circ \cdots \circ f$ (n fonctions) et $I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$. a) Démontrer que pour tout $x \in (0,1)$ on a $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. b) Déterminer $\lim_{n\to\infty} I_n$.

La question a) vaut **15**. La question b) vaut **10** : pour qui connaît le théorème de convergence dominée, elle vaut **0** (la suite f_n converge simplement vers 0 sur $(0,1)$ et $|f_n| \leq 1$), et sans lui elle vaut quand même autour de **15**. Comme le théorème est assez connu, la note finale est une moyenne entre les deux cas : **10**.

Exemple 2 (OJM 2025, classe XI, P4). Déterminer tous les triplets de matrices $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tels que $A = BC - CB$, $B = CA - AC$, $C = AB - BA$.

Ici on peut effectivement faire les calculs, et les calculs se passent bien : la note est **15**. Si on essaie de résoudre le problème avec le théorème de Cayley-Hamilton, c'est-à-dire sans calculs, il est nettement plus difficile ; la solution facile est celle par calcul direct, pour laquelle il faut seulement le courage de le faire.

Exemple 3 (ONM 2006, classe X, P4). Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Déterminer n ensembles A_i, $1 \leq i \leq n$, du plan, deux à deux disjoints, tels que : a) pour tout cercle $\mathcal{C}$ du plan et tout i, $A_i \cap \mathrm{Int}(\mathcal{C}) \neq \emptyset$; b) pour toute droite d du plan et tout i, la projection de A_i sur d ne coïncide pas avec d.

On prend des ensembles dénombrables et denses, de la forme $(\mathbb{Q}+a_i)\times\mathbb{Q}$ avec des différences $a_i - a_j$ irrationnelles : la densité donne a), et la projection d'un ensemble dénombrable ne peut pas recouvrir une droite, ce qui donne b). Pour qui connaît l'analyse (dénombrable contre indénombrable), la note est **20**. Quelqu'un qui n'est pas familier avec la notion de densité donnerait plus, autour de **40**.

Exemple 4 (ONM 2023, classe IX, P4). Soient $r, s \in [1, \infty)$ des réels tels que pour tous entiers naturels non nuls a, b avec $a \mid b$, on ait $[ar] \mid [bs]$. a) Démontrer que $\frac{s}{r}$ est un entier naturel. b) Montrer que r et s sont des entiers naturels. ($[x]$ est la partie entière de x.)

La question a) vaut **15** : sans analyse elle vaut autour de **20**, et qui connaît l'analyse la résout immédiatement (**0**). Comme peu d'élèves de classe IX connaissent l'analyse, la note finale est une moyenne entre les deux cas. La question b) vaut **30**. Il n'y a pas de note pour le problème

entier : chaque question a sa propre note. La solution la plus simple de b) utilise « l'analyse de classe IX » : la densité des parties fractionnaires $\{nr\}$ (théorème de Kronecker) quand r est irrationnel, et le cas rationnel se traite à part.

Exemple 5 (ONM 2004, classe XII, P3). Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable telle que $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 xf(x)\,dx = 1$. Montrer que $\int_0^1 f^2(x)\,dx \geq 4$.

Ici intervient « Pythagore pour les intégrales » (théorème 4.44, l'identité clé, de mon livre *Analiză și Algebră pentru Olimpiadă*) : si $f = g + h$ avec g, h orthogonales, c'est-à-dire $\int gh = 0$, alors $\int f^2 = \int g^2 + \int h^2 \geq \int g^2$. On prend $g = 6x - 2$, qui vérifie les deux mêmes conditions que f, et $h = f - g$ est orthogonale à 1 et à x ; il en résulte $\int_0^1 f^2 \geq \int_0^1 (6x-2)^2 dx = 4$. Pour qui connaît la théorie, le problème vaut **0** : il suffit de savoir l'appliquer. Pour qui ne la connaît pas, le problème n'est pas vraiment facile et vaut autour de **20**. Comme assez peu de candidats connaissent cette inégalité, la note finale est une moyenne entre les deux cas : **15**.

Les cinq exemples montrent comment lire une note : elle répond à la question « quelle est la difficulté de la solution la plus facile », et une solution qui exploite un théorème connu fait baisser la note (la note finale étant une moyenne entre ceux qui le connaissent et ceux qui ne le connaissent pas).

Ce que la note ne prétend pas : le nombre de résolutions

ROHS ne fait **pas** d'affirmations du genre « un problème à 50 ROHS devrait avoir 0 résolution, à 45 entre 1 et 3, à 40 entre 3 et 6, à 35 entre 6 et 10 » et ainsi de suite. La raison : les élèves ont tendance à ne pas assez réfléchir au P4 de l'ONM, parce qu'il les intimide. Le nombre de résolutions dépend donc de la position du problème et du temps, pas seulement de sa difficulté. Cela dit, la note ne se calcule **pas** à partir du nombre de résolutions, mais je regarde aussi les résultats officiels, comme un signal indicatif. Le meilleur signal, c'est un problème entre P1 et P3, auquel beaucoup ont réfléchi, et sur lequel personne n'a eu la note maximale (voir ONM 2013, classe XII, P2, au niveau 50).

Exemple (ONM 2026, classe XI, P4). Soit $M = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ un ensemble de $n \geq 2$ matrices de $\mathcal{M}_{2026}(\mathbb{C})$ tel que $AB \in M$ pour tous $A, B \in M$. Démontrer qu'il existe $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n \in \{-1, 0, 1\}$, non tous nuls, tels que $\operatorname{rg}(\varepsilon_1 A_1 + \varepsilon_2 A_2 + \ldots + \varepsilon_n A_n) \leq 1013$.

Je lui donne **35 ROHS** : c'est un problème difficile, mais pas très difficile (le niveau « très difficile » commence à 40). Mais c'était le dernier problème, à une nationale où, si l'on résolvait trois problèmes, on était parmi les quatre premiers, si bien que les candidats n'y ont pas vraiment réfléchi. C'est naturel, parce que les P4 sont presque toujours les problèmes les plus difficiles du sujet.

Ce que j'ai repris de MOHS et ce qui diffère

L'échelle MOHS d'Evan Chen définit chaque niveau par quatre choses : un nom (par exemple « très facile » ou « brutal »), la place que le problème peut occuper dans le concours (IMO 1/4, 2/5 ou 3/6), la façon dont s'en sortent les élèves des meilleurs pays, et quelques exemples récents. Evan Chen souligne aussi que les notes sont son opinion personnelle. ROHS garde ces quatre éléments et les pas de 5, mais trois choses changent.

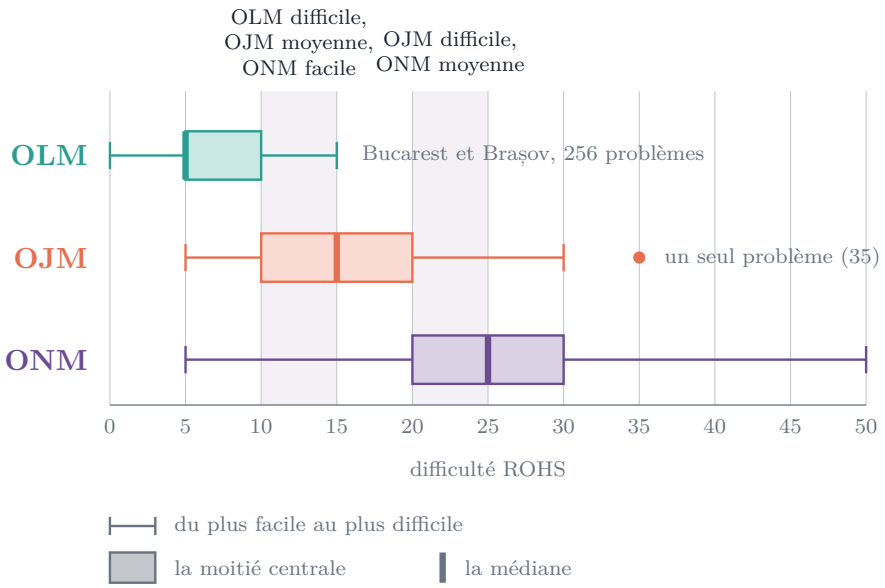
- **La place dans le concours se mesure en étapes et en positions.** Les niveaux sont décrits par la position (P1 à P4) qu'occupent les problèmes à l'OJM et à l'ONM, et non par l'IMO.
- **Le même chiffre ne veut pas dire la même chose que dans MOHS.** MOHS a un seul concours de référence, l'IMO, alors que ROHS met plusieurs concours sur la même échelle : quatre classes et trois étapes qui se chevauchent. C'est pourquoi un problème à 10 ROHS est strictement plus facile qu'un problème à 10 MOHS, et les deux échelles ne peuvent pas être comparées chiffre à chiffre.
- **La note ne se mesure pas en résolutions.** Pour chaque niveau, MOHS donne un indicateur de la façon dont les candidats devraient s'en sortir, mais précise qu'il faut le lire dans son contexte et que la note et les résultats ne sont pas dans une relation de cause à effet. ROHS ne donne pas un tel indicateur : il ne dit pas, par exemple, qu'un problème à 50 devrait avoir 0 résolution, parce que le nombre de résolutions dépend à la fois de la position du problème et du temps disponible. Je regarde aussi les résultats, pour calibrer les notes, mais la note ne repose pas sur eux (voir « Ce que la note ne prétend pas »). Les descriptions des niveaux parlent de l'idée et de la position, pas des résolutions.

> **Avertissement d'utilisation, comme pour MOHS.** Les notes sont un point de repère, pas une interdiction. Regarde la note pour voir à

> peu près à quel niveau travailler, et travaille toujours des problèmes un peu au-dessus de ton niveau. Terence Tao dit :
>
> *« The ideal problem to work on is one which is just outside of your reach »*
>
> Terence Tao
>
> Si tu sautes les problèmes à note élevée, tu n'apprendras jamais à les résoudre, et si tu ne travailles que des problèmes trop faciles, tu ne progresseras pas.

Les trois étapes sur l'échelle

La figure montre où se situent les problèmes de chaque étape. Pour l'OJM et l'ONM, la figure repose sur 784 problèmes notés, issus de 196 sujets, pour les classes IX à XII, années 2001 à 2026. Pour l'OLM, elle repose sur 256 problèmes de l'étape locale de deux villes : Bucarest (96 problèmes, années 2007, 2008, 2011, 2012, 2020 et 2024) et Brașov (160 problèmes, années 2010, 2013, 2014, 2016 à 2019, 2023, 2025 et 2026), notés avec les mêmes règles et avec des repères pris à l'OJM et à l'ONM. Le trait fin va du problème le plus facile au plus difficile, la boîte contient la moitié centrale des problèmes, et la barre épaisse dans la boîte est la médiane.



Ce que l'on voit. À l'OJM, la moitié centrale des problèmes a une difficulté entre 10 et 20, la médiane est 15, et les problèmes les plus difficiles valent 30, avec une seule exception à 35. À l'ONM, la moitié centrale est entre 20 et 30, la médiane est 25, et 93 problèmes sur 100 valent au plus 30. Les problèmes les plus difficiles de l'ONM montent jusqu'à 50.

Le chevauchement est grand, exactement comme le supposait l'idée de départ de l'échelle : 18 % des problèmes de l'ONM ont une difficulté d'au plus 15, c'est-à-dire au niveau de la médiane de l'OJM, et 49 % des problèmes de l'OJM ont une difficulté d'au moins 20, c'est-à-dire presque au niveau de la médiane de l'ONM (25). Par position, cela veut dire que, d'habitude, un P3

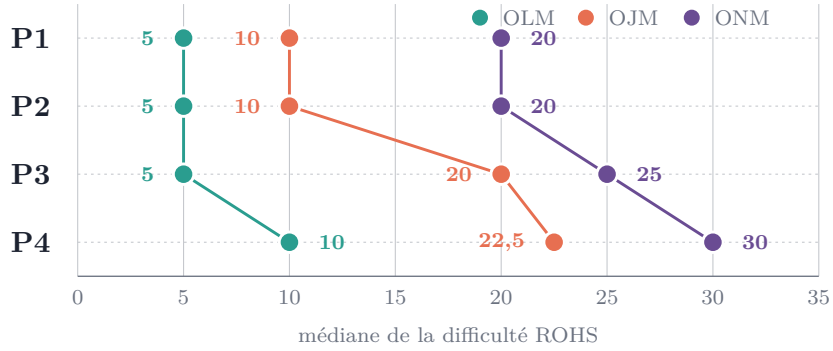
ou un P4 de l'OJM (médianes 20 et 22,5) sont au niveau d'un P1 ou d'un P2 de l'ONM (tous deux de médiane 20), et qu'un P4 de l'OLM (médiane 10) est au niveau d'un P1 ou d'un P2 de l'OJM (tous deux de médiane 10). Les problèmes les plus faciles de la nationale (55 sur 400 valent au plus 10, dont 34 sont des P1) sont au niveau des problèmes de l'étape locale.

L'OLM, mesurée sur deux villes. À l'OLM, la moitié centrale des problèmes a une difficulté entre 5 et 10, la médiane est 5, et le problème le plus difficile vaut 15 ; 14 problèmes (5 %) valent 0. L'idée de départ de l'échelle se confirme ici aussi : les problèmes les plus difficiles de l'OLM (17 sur 256, notés 15) sont au niveau de la médiane de l'OJM, et 47 % des problèmes de l'OJM (ceux notés au plus 10) sont au niveau des plus difficiles de l'OLM. La zone de 10 à 15 est commune aux trois étapes. Bucarest et Brașov se ressemblent pour la médiane et le plafond ; Brașov a plus de problèmes très faciles (11 sur 160 valent 0, contre 3 sur 96 à Bucarest).

La limite de l'OLM. L'échantillon vient de deux villes, sur 16 ans, et ne représente pas tout le pays. D'autres départements peuvent avoir des problèmes encore plus faciles ou plus difficiles, donc le vrai 0 et le vrai plafond peuvent être différents. L'échelle elle-même n'a pas eu besoin d'être adaptée : aucun problème de l'OLM ne dépasse 15, et les 14 problèmes à 0 fixent l'extrémité basse au niveau de l'échantillon.

La position dans le sujet

Chaque sujet a quatre problèmes. La deuxième figure montre la médiane de la difficulté par position, pour les trois étapes, et le tableau en dessous donne aussi la moitié centrale des problèmes de chaque position.



Médiane par position (entre parenthèses, le premier et le troisième

quartile, c'est-à-dire la moitié centrale des problèmes de cette position) :

	P1	P2	P3	P4
OLM (Bucarest et Brașov)	5 (5 à 6,25)	5 (5 à 10)	5 (5 à 10)	10 (5 à 10)
OLM Bucarest	5 (5 à 10)	7,5 (5 à 10)	10 (5 à 10)	10 (8,75 à 15)
OLM Brașov	5 (5 à 5)	5 (5 à 10)	5 (5 à 10)	7,5 (5 à 10)
OJM	10 (5 à 10)	10 (10 à 20)	20 (10 à 25)	22,5 (20 à 25)
ONM	20 (10 à 20)	20 (20 à 25)	25 (20 à 30)	30 (25 à 30)

Dans les trois étapes, la difficulté augmente de P1 à P4, mais P1 et P2 ont presque la même médiane. À l'OLM l'augmentation est faible (de 5 à 10), à l'OJM elle est forte (de 10 à 22,5), et à l'ONM elle va de 20 à 30. Les positions se chevauchent d'une étape à l'autre : le P4 de l'OJM (22,5) se situe entre le P2 (20) et le P3 (25) de l'ONM, et le P3 de l'OJM (20) est au niveau des P1 et P2 de l'ONM.

Ce que signifie chaque niveau

Les noms des niveaux sont ceux que j'ai donnés :

Note	Signification	Note	Signification
0	en dessous du niveau olympique	30	moyenne à difficile
5	triviale	35	difficile
10	très facile	40	très difficile
15	facile	45	extrêmement difficile
20	moyenne facile	50	ne devrait pas être posée en concours
25	moyenne		

Chaque niveau a ci-dessous une caractéristique, la place qu'il occupe d'habitude dans le sujet, le nombre de problèmes qui lui correspondent et deux exemples, avec leur énoncé. Les descriptions parlent de l'idée et de la position, pas du nombre d'élèves qui ont résolu le problème, parce que le nombre de résolutions dépend aussi de la position du problème et du temps.

0 Niveau 0 : en dessous du niveau olympique

Exercice de manuel, en une seule étape standard, résolu en quelques minutes. N'apparaît qu'à l'OLM (14 problèmes). Exemples :

- **OLM 2020, classe IX, P2**. Soient a et b des réels tels que $[|a+b|] < 4$. Montrer que $[ab] < 4$. (Pour a réel, on note $[a]$ la partie entière de a et $|a|$ la valeur absolue de a.)
- **OLM Brașov 2016, classe IX, P1**. Montrer que le nombre $a = 2n^2 + \left[\sqrt{4n^2+n}\right] + 1$, où $n \in \mathbb{N}^*$, peut s'écrire comme somme de deux carrés parfaits. ($[x]$ désigne la partie entière du réel x.)

5 Niveau 5 : triviale

Une seule étape standard ou une idée connue, appliquée directement, sans piège. Le type habituel de P1 très facile à l'OJM ; à l'ONM, il apparaît rarement. 46 problèmes à l'OJM et à l'ONM (dont 33 P1) et 128 à l'OLM. Exemples :

- **ONM 2003, classe IX, P1**. Déterminer les entiers naturels non nuls a et b tels que pour tous $x, y \in [a, b]$ on ait $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} \in [a, b]$.
- **OJM 2003, classe IX, P1**. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telles que, pour tout $n \geq 1$, $f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$ soit un cube parfait au plus égal à n^3.

10 Niveau 10 : très facile

Une idée connue appliquée avec un peu d'attention : deux étapes courtes ou une reformulation suivie d'un calcul. P1 et P2 à l'OJM, un P1 facile à l'ONM. 188 problèmes à l'OJM et à l'ONM, 97 à l'OLM. Exemples :

- **ONM 2002, classe IX, P2**. Soit ABC un triangle rectangle en A et $M \in (AB)$ tel que $\frac{AM}{MB} = 3\sqrt{3} - 4$. Déterminer la mesure de l'angle B, sachant que le symétrique de M par rapport au milieu du segment $[GI]$ appartient à la droite AC. (G est le centre de gravité du triangle et I le centre du cercle inscrit.)
- **ONM 2004, classe X, P1**. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$ pour tous réels x, y. Montrer que si, pour tout réel x, la suite $x, f(x), f(f(x)), \ldots$ est une progression arithmétique, alors il existe un réel a tel que $f(x) = x + a$ pour tout réel x.

15 Niveau 15 : facile

Une étape qui ne se voit pas du premier coup. C'est ici que les étapes se rencontrent : un P3 à l'OJM et un P1 ou P2 à l'ONM. 31 problèmes à l'OJM et à l'ONM, 17 à l'OLM. Exemples :

- **OLM 2024, classe X, P4**. On considère des nombres complexes a, b, c, d tels que $|a| = |b| = |c| = |d| = 1$, $|a+b+c+d| = \sqrt{2}$ et $a^2+b^2+c^2+d^2 = 0$. Montrer que $|a^3 + b^3 + c^3 + d^3| = 2\sqrt{2}$.
- **ONM 2001, classe IX, P1**. Soit A un ensemble de nombres réels vérifiant : a) $1 \in A$; b) $x \in A \Rightarrow x^2 \in A$; c) $x^2 - 4x + 4 \in A \Rightarrow x \in A$. Montrer que $2000 + \sqrt{2001} \in A$.

20 Niveau 20 : moyenne facile

Deux idées indépendantes ou une idée moins connue. Un P4 à l'OJM, un P2 ou P3 à l'ONM. 217 problèmes (102 à l'OJM, 115 à l'ONM), le niveau le plus nombreux. Exemples :

- **ONM 2001, classe XI, P2**. On considère une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ de rang r, où $n \geq 2$ et $1 \leq r \leq n-1$. a) Montrer qu'il existe $B \in M_{n,r}(\mathbb{C})$, $C \in M_{r,n}(\mathbb{C})$, avec $\operatorname{rg} B = \operatorname{rg} C = r$, telles que $A = BC$; b) Montrer que la matrice A vérifie une équation polynomiale de degré $r+1$, à coefficients complexes.
- **ONM 2005, classe IX, P2**. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que
$$x(f(x+1) - f(x)) = f(x),$$
pour tout $x \in \mathbb{R}$, et
$$|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|,$$
pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

25 Niveau 25 : moyenne

Une idée non évidente, ou une idée connue mais déguisée. Un P3 ou P4 habituel à l'ONM, un problème difficile à l'OJM. 151 problèmes (69 à l'OJM, 82 à l'ONM). Exemples :

- **ONM 2002, classe XII, P2**. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ intégrable, telle que
$$0 < \left| \int_0^1 f(x)\,dx \right| \leq 1.$$
Démontrer qu'il existe $x_1 \neq x_2$, $x_1, x_2 \in [0,1]$, tels que
$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = (x_1 - x_2)^{2002}.$$

- **ONM 2003, classe IX, P2**. Un entier naturel n, $n \geq 2$, est dit « amical » s'il existe une famille de parties non vides $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ telles que : 1) $i \notin A_i$ pour tout $i = \overline{1,n}$; 2) $i \in A_j$ si et seulement si $j \notin A_i$, pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ distincts ; 3) $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Montrer que : a) le nombre 7 est amical ; b) n est amical si et seulement si $n \geq 7$.

30 Niveau 30 : moyenne à difficile

Une idée non évidente, au-dessus d'un P3 habituel de l'ONM et en dessous d'un P4 très difficile. Surtout des P4 à l'ONM ; à l'OJM il n'y a que 18 problèmes, presque tous des P4 ou des P3. Au total 121 problèmes (18 à l'OJM, 103 à l'ONM). Exemples :

- **ONM 2012, classe X, P2**. On considère trois nombres complexes a, b et c tels que $a + b + c = 0$ et $|a| = |b| = |c| = 1$. Démontrer que

$$3 \leq |z - a| + |z - b| + |z - c| \leq 4,$$

  pour tout nombre complexe z tel que $|z| \leq 1$.

- **ONM 2002, classe X, P3**. Déterminer les nombres réels a, b, c, d, e de l'intervalle $[-2, 2]$ tels que :

$$a + b + c + d + e = 0$$

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3 = 0$$

$$a^5 + b^5 + c^5 + d^5 + e^5 = 10$$

35 Niveau 35 : difficile

Une idée difficile, en général dans le dernier problème du sujet. 23 problèmes (un à l'OJM, 22 à l'ONM ; 16 sont des P4). Exemples :

- **ONM 2025, classe XII, P4**. Soit p un nombre premier, $p \geq 3$, et k un nombre impair non divisible par p. Soit K un corps fini à $kp+1$ éléments et $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_t\}$ l'ensemble des éléments de $K^* = K \setminus \{0\}$ qui ne sont pas d'ordre k dans le groupe multiplicatif $(K^*, \cdot)$. Montrer que le polynôme $P(X) = (X + x_1)(X + x_2) \ldots (X + x_t)$ a au moins p coefficients égaux à 1.

- **ONM 2005, classe XII, P4**. Soit A un anneau à $2^n + 1$ éléments, où n est un entier naturel non nul, et $M = \{k \mid k \in \mathbb{N},\ k \geqslant 2,\ x^k = x,\ \text{pour tout } x \in A\}$. Démontrer que les affirmations suivantes sont équivalentes : (a) A est un corps ; (b) M est non vide et son plus petit élément est égal à $2^n + 1$.

40 Niveau 40 : très difficile

Uniquement des P4 de l'ONM (5 problèmes), trop difficiles pour un P2 ou un P3 habituel. Exemples :

- **ONM 2019, classe XI, P4**. Soit p un nombre premier. Pour toute permutation $\sigma \in S_p$, on considère la matrice $A_\sigma = (a_{ij})_{i,j=1}^{p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{Z})$, de coefficients $a_{ij} = \sigma^{i-1}(j)$, où σ^0 est la permutation identique et $\sigma^k = \sigma \circ \sigma \circ \cdots \circ \sigma$, k fois. Montrer que l'ensemble

$$D = \{|\det(A_\sigma)| : \sigma \in S_p\}$$

  a au plus $1 + (p-2)!$ éléments.
- **ONM 2013, classe X, P4**. a) Montrer que

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^m} < m,$$

  pour tout $m \in \mathbb{N}^*$. b) Soient $p_1, p_2, \ldots, p_n$ les nombres premiers inférieurs à 2^{100}. Montrer que

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_n} < 10.$$

45 Niveau 45 : extrêmement difficile

Au-dessus d'un P4 très difficile. Il n'y en a qu'un dans les données :

- **ONM 2015, classe XII, P4**. Déterminer les fonctions polynomiales non constantes $f : [0,1] \to \mathbb{R}^*$, à coefficients rationnels, qui ont la propriété suivante : pour tout x de l'intervalle $[0,1]$, il existe deux fonctions polynomiales $g_x, h_x : [0,1] \to \mathbb{R}$, à coefficients rationnels, telles que $h_x(x) \neq 0$ et

$$\int_0^x \frac{1}{f(t)}\,\mathrm{d}t = \frac{g_x(x)}{h_x(x)}.$$

50 Niveau 50 : ne devrait pas être posée en concours

La note 50 ne veut pas dire « le problème le plus difficile », mais un problème qui **n'aurait pas dû être posé en concours**, parce qu'il ne départage personne : celui qui le résout le fait plutôt par chance à la correction. Il peut y avoir plusieurs problèmes à 50. Il n'y en a qu'un dans les données, avec a) 50 et b) 30. Sur ce problème, sur 54 candidats, personne n'a eu plus de 4 points sur 7, bien que, étant un P2, beaucoup y aient réfléchi :

- **ONM 2013, classe XII, P2**. Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau qui vérifie simultanément les deux conditions suivantes : (1) A n'est pas un corps, (2) pour tout élément non inversible x de A, il existe un entier $m \geq 1$, qui dépend de x, tel que

$$x = x^2 + x^3 + \cdots + x^{2^m}.$$

  Montrer que : (a) $x + x = 0$ pour tout $x \in A$, (b) $x^2 = x$ pour tout élément non inversible $x \in A$.

Répartition actuelle des notes par étape (nombre de problèmes).

Étape	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	Total
OJM	0	41	138	15	102	69	18	1	0	0	0	384
ONM	0	5	50	16	115	82	103	22	5	1	1	400
OLM	3	41	42	10	0	0	0	0	0	0	0	96
OLM Brașov	11	87	55	7	0	0	0	0	0	0	0	160

Les tableaux de tous les problèmes

Les tableaux ci-dessous contiennent les 1040 problèmes notés : 784 de l'OJM et de l'ONM, un tableau par classe, et 256 de l'OLM (96 de Bucarest et 160 de Brașov), dans deux tableaux séparés à la fin. Chaque case indique la note ROHS (de 0 à 50), la lettre du thème, **un astérisque** si la solution la plus simple utilise le programme de classes supérieures (par exemple un problème de classe X résolu simplement avec des dérivées). La couleur est d'autant plus intense que le problème est difficile. Si un problème a des notes séparées par question, elles apparaissent dans l'ordre a, b, c, et la couleur suit la plus grande.

Thèmes : A algèbre, G géométrie, C combinatoire, T théorie des nombres, L analyse, S structures algébriques (groupes, anneaux, corps, matrices). **Lacunes :** 2000 (pas de source), 2020 (concours non tenu), OJM 2021 (ONGM, autre format). Pour l'OLM, les années couvertes sont celles dont les sujets de lycée sont publiés : Bucarest (2007, 2008, 2011, 2012, 2020, 2024) et Brașov (2010, 2013, 2014, 2016 à 2019, 2023, 2025, 2026) ; 2009, 2015, 2021 et 2022 manquent.

facile **0** **5** **10** **15** **20** **25** **30** **35** **40** **45** **50** difficile

case avec des notes par question : **5/15*** A astérisque : programme de classes supérieures à l'OJM et à l'ONM, la note est un lien vers la discussion du problème sur AoPS (il n'y a pas de discussions AoPS pour l'OLM)

case vide : · problème non noté

Classe IX

An	OJM				ONM			
	P1	P2	P3	P4	P1	P2	P3	P4
2001	5/10 A	5* G	15 A	20/5/5* A	15 A	15 G	25 G	20 T
2002	10 A	10/5 G	5/20 G	5/20 A	5 A	10 G	15 T	20 A
2003	5 A	10 T	10 G	10/25 C	5 A	20/25 C	25 G	30 G
2004	5 A	5* G	10/10 T	20 C	15 T	20 A	30 G	5/10/30C
2005	0/5 A	10 G	10/10 G	20/5 C	20 G	20 A	20 T	30 A
2006	20 A	25 C	20 G	20 T	10 A	20 G	10/20 G	25 C
2007	5/10/5A	10/5 G	10 T	20/5 G	20 A	25 G	20 C	5/30 C
2008	10 A	10 C	10 T	25 G	20 A	10/10 A	20 A	25 G
2009	5 G	20 C	10/5 A	20 A	20 G	5 A	25 A	25 C
2010	5/10/10G	10 A	25 A	20 A	10/20 G	10 G	5/20 A	35 A
2011	5 G	10 C	10 A	20 A	20 A	25 T	30 G	25 T
2012	5 A	10 A	10/5 G	25 T	20 G	25 L	25 A	30 C
2013	0/5 A	10/10 G	20 A	10 C	10 T	30 A	20/30 G	25 T
2014	5 A	20 G	25 G	20 T	20 T	5/30 T	10 G	20 G
2015	10 G	10 A	10 T	25 T	25 T	25 A	35 G	35 A
2016	5 G	20 T	25 A	10 T	20 G	30 A	20/5 T	25 A
2017	10 G	25 G	5/10 T	25 A	20 G	10 G	10/25 T	10/25/30A
2018	10 A	10 G	10 G	20 L	30 G	25 A	35 A	35 C
2019	5/0 A	10 G	5/20 A	20 T	20 G	30 G	25 T	30 A
2021	*ONGM, exclue*				10 G	30 G	25 A	20 A
2022	10/5 A	5/20 A	5/10 T	5/30 G	20 T	20 G	25 A	30 A
2023	0/10 G	5/5 A	5/25 A	20 T	0/20 A	25 A	30 C	15/30 T
2024	5 G	5/10 A	20 T	25/10 G	10/20 G	20 T	30 A	30 A
2025	10 G	10 A	20 A	20 C	10 C	30 G	10/30 A	25/35 L
2026	5/20 A	10 G	10 T	25 T	20 A	30 A	35 T	40 G

Classe X

An	OJM				ONM			
	P1	P2	P3	P4	P1	P2	P3	P4
2001	15 A	10 A	15 G	25 A	15 A	20 G	20 C	30 A
2002	15 A	15 A	20 A	5/20 C	20 G	15 A	30 A	30 L
2003	10 C	10/20* A	15/10 G	25 A	10 G	15 A	25 G	20/30 A
2004	5 C	10 T	10 G	25 A	10 L	20 G	25 A	20/15 C
2005	10 A	10 A	30 G	20 C	25 A	30 G	10/20 T	10/15 T
2006	10 A	10 G	20/10 C	20/25 A	5 C	20 L	20 T	20 L
2007	10 A	0/5 C	20 G	25 A	10 A	5 A	10 T	5/30 C
2008	10 A	10 A	5/5 A	20 A	20 G	20 A	25 C	35 T
2009	5/0 A	10 A	5/20 A	5/20 A	5/20 A	20 A	30 A	35 C
2010	5/5 A	10 A	20 A	10/20 A	10 A	20 A	10/20 C	30 G
2011	10 A	10/20 A	25 A	10/20 A	20/10 A	20 A	20 L	5/30 T
2012	10/25 L	10/20 A	5/15 A	25 A	25 A	30 G	20/5 A	20 C
2013	10/5 A	10 A	10 L	20 A	10 A	25 A	15 A	40 T
2014	10 A	10 A	20 A	30 A	20 T	30 T	20 C	30 A
2015	20 A	10 A	25 A	20 A	10 A	10/20 C	15 A	30 C
2016	5 A	25 A	5/10 A	5/10 A	20 L	5/30 L	5/25 G	25 C
2017	5/10 T	20 A	5 A	5/5 A	10 A	20/20 A	10 A	25 C
2018	5 A	10 A	25 A	10 A	10 L	25 G	15 A	30 A
2019	10 A	10/20 A	10 G	30 A	10 A	25 C	35 A	30 C
2021	*ONGM, exclue*				20 A	10 A	20 C	30 A
2022	10 A	20 G	10 A	25 A	10 A	20 A	25 A	20 C
2023	10 A	5/10 G	25 A	25 A	20* L	30 L	30/30 G	35 C
2024	10 A	10/20 G	10 A	20 A	20* A	25 G	10/25 C	20/30 S
2025	10 A	10 A	20 A	10/30 G	10/25 G	30 C	25 A	35 A
2026	5/5 A	10 A	10 A	30 A	30 A	25 A	30 A	30 C

Classe XI

An	OJM				ONM			
	P1	P2	P3	P4	P1	P2	P3	P4
2001	10 A	5/20 A	25 L	5/30 L	10 L	5/20 A	5/20 L	25/5 L
2002	5/15 L	0/20 G	5/20 A	25 L	10/10/5G	5/10 L	5/20 A	20 L
2003	15 A	10/20 L	5/10 A	10/25/30L	20 G	30 A	20 L	10/25 A
2004	5/10 L	5/20 A	5/20 L	5/10/25A	10 G	10/20 A	15/10 L	20/10/30L
2005	5/20 A	25 L	10/25 A	20/20 L	10/25 A	10/20 L	30 A	5/30 L
2006	10 A	10/20 A	10/5 L	10/10 L	20 A	10/20 A	25 G	20/30 L
2007	10 L	5/10 A	10/20 L	20 A	25 A	20 L	25 A	30 L
2008	10 A	20 A	5/20 L	30 L	20 L	35 A	15 L	25 A
2009	10 A	5 A	30 L	5/35 L	5/10 L	20 L	30/10 A	25 L
2010	5 L	10 A	20 L	25 L	10 A	10 A	20 L	25 L
2011	5/10 L	0/10 A	25 A	20 L	30 A	25 L	20 L	20/5 A
2012	10 L	5/25 A	5/10 A	5/25 L	10/20 L	20 A	25 A	30 L
2013	10 L	10/10 A	30/20 A	0/10 L	20 A	25 A	30 L	10/30 L
2014	5/10 A	5/10 L	5/5 A	20/25 L	25 L	20 L	25/10 A	40 A
2015	5/5 L	10/20 A	25 A	25 L	10 L	25* A	30 L	20 A
2016	10 A	25 A	20 L	30/20 L	10 A	10/20 A	10 L	30 L
2017	10/20 L	10/10 L	20/5 A	10 A	30 L	25 A	25 A	20 L
2018	20 A	20/30 A	25 L	20 L	30 A	30 L	25 L	25 A
2019	10 L	20 A	30 A	10/20 L	20 A	10 L	10/25 L	40 A
2021	*ONGM, exclue*				10 L	20 A	25 L	30 A
2022	10 L	20 A	10/10 L	25 A	5/20 L	20/25 A	30 L	20 A
2023	10 L	10/5 A	25 L	25/5 A	25 L	20 A	30/20 A	40 L
2024	10 A	20 L	5/20 A	10/30 L	30 L	5/25 A	10 A	25/30 L
2025	5 L	10/5 A	20/10 L	15 A	30 L	20 A	30 L	30/30 A
2026	5 A	10/25 L	20 A	25 L	20/20 L	20 A	30/10 L	35 A

Classe XII

An	OJM				ONM			
	P1	P2	P3	P4	P1	P2	P3	P4
2001	5/15 S	20 S	10 L	0/15 L	0/20 A	15 S	15/30 L	30/25 L
2002	5/15 S	5/10 S	10/25 L	5/25 L	0/15 S	25 L	25 L	10/30 S
2003	5/5/10 S	10/15 L	5/25 S	5 L	5/10 S	20 L	5/20 L	10/5/30 S
2004	5/20 A	20 L	5/0/25 S	10/20 L	20 L	0/20 S	15 L	10/20/5 S
2005	20 C	10/5 L	10 S	10/25 S	10 S	5/20 S	20 L	35 S
2006	5 L	10 S	25 S	10 L	10 S	20 L	25 S	30 L
2007	5/5 S	10 L	10 L	10/25 S	10 L	5/10 L	20 S	10 S
2008	20 L	5/10 L	25 S	5/30 S	25 L	20 L	10/25 S	30/30 S
2009	0/10 L	10 S	25/10 L	20 S	10 L	5/25 S	25 S	35 L
2010	10 S	10/20 S	25 L	10/20 L	10 L	25/10 S	30 S	10/20 L
2011	5 L	0/10 S	5/10 L	10/25 S	20 S	10 L	25 S	30 L
2012	10 L	20 S	10 S	20 L	10 L	20/10 S	5/30 L	30 A
2013	5 L	10/10/20 S	5/10 L	20/25 S	20 L	50/30 S	25 L	30 S
2014	5 L	25 L	5/20 S	30 S	10/25 S	25 L	10/30 L	30/35 S
2015	0/10 S	0/10 L	10 L	25 S	10/25 S	25 S	35 L	45 A
2016	5/10 S	10/5 L	25 S	5 L	5/20 L	20/30 S	20 L	25 S
2017	10 L	20 S	20 L	20/30 S	5/10 L	20/30 A	30 S	10/30 L
2018	5/5 L	20 S	10 L	25 S	25 S	10 L	5/25 L	30 S
2019	5/5 S	20 L	10 S	25 L	30 L	30 S	5/35 L	25/35 A
2021	*ONGM, exclue*				10 L	20 S	20 T	30 L
2022	0/5/5 S	10 S	25 L	20 L	25/5 L	30 S	5/20 L	30 S
2023	20 L	25 S	5/10 L	25/20 S	10/30 S	5/30 S	30 L	35 L
2024	10 S	0/5/10 L	5/20 S	25 L	20 L	25 S	10 L	10/30 S
2025	5/5 S	10/25 S	5/20 L	5/20 L	20/5 S	10 L	20/30 L	35 S
2026	5/25 L	0/20 S	20/10/10 S	15/10 L	10 L	30/10 S	20 S	30 L

OLM Bucarest (étape locale, toutes les classes)

An	classe IX				classe X			
	P1	P2	P3	P4	P1	P2	P3	P4
2007	5/5 A	5/0/5 G	5/10 C	15 T	0/10 A	0/5 A	10/15 G	10/15 C
2008	5/5 A	5/5 A	5 A	5 G	10 A	5/10 A	5/5 A	5/5/0 C
2011	5 T	10 A	5/10 G	10 C	5 G	10 A	0/10 A	10 A
2012	0/5 T	10 L	5/10 G	5 A	5 A	10 A	10 A	10/15 A
2020	5 T	0 A	5 T	5 G	5 A	5 A	10 L	10 L
2024	0/5 A	5 A	0/5 G	10 A	5/10 A	5 A	5 T	15 A

An	classe XI				classe XII			
	P1	P2	P3	P4	P1	P2	P3	P4
2007	5/10 A	5/10 A	10/10 L	5/10/15 L	5/0 L	0/5/5 L	5/10 S	5/15 S
2008	5 A	5 L	5/5 L	5/10 L	0/5 S	0/5/10 S	0 L	10 L
2011	0/5/10 L	5/10/5 L	5 A	5/5/0 A	5 L	15 L	10 S	0/5/5 S
2012	5/0 L	5/10 A	0/10 L	15 A	5/10 L	0/5 S	5/10 S	5/15 L
2020	5/10 A	5 A	10 L	5/10 L	0 L	5 L	5/10 S	5/5 S
2024	5 A	0/10 A	5/5 L	10/5 L	5 L	5/10 S	0/10 L	10 S

OLM Brașov (étape locale, toutes les classes)

An	classe IX				classe X			
	P1	P2	P3	P4	P1	P2	P3	P4
2010	10/5 A	10 G	0/5/10A	0/5 A	5/10 A	5/5/5A	5 A	10 T
2013	0/10 A	5 A	10 G	0 G	5 A	10 A	10 A	15 A
2014	10 T	5/10 A	5 A	0 A	0 A	5 A	5 A	10 L
2016	0 T	5 G	10 A	10 T	5 A	10 A	10/5 A	5 A
2017	0/5 A	5/5 A	5/5 T	0/10 G	0/5 A	5 G	0/5 A	5/10 A
2018	0/0 A	10 A	5 A	10 G	5 A	5/0/5A	5 A	10 A
2019	5 A	0/10 G	0/5 A	0/5 A	5 A	10 A	10 A	5 A
2023	5 T	10 G	5 A	5/10 A	0/5 A	5 A	0/5 A	0/5/10L
2025	0/5 A	0 A	5 G	5 G	5 A	10 A	10 A	5 A
2026	10 T	0/5 A	0 A	0 G	5/0 A	5 A	5 C	5/10 A

An	classe XI				classe XII			
	P1	P2	P3	P4	P1	P2	P3	P4
2010	10 A	15 L	0/5 S	10 S	10 S	15/5 S	10 L	5 L
2013	10 C	5 S	5/5/10L	5/5 L	5 L	5 L	5/5 S	0/5 S
2014	5 S	10 A	5/10 L	10 L	5 S	10 L	5/10 L	5 S
2016	5/5 A	10 A	5/10 L	0/5 S	0/5 L	5 S	5/0 S	15 L
2017	5/5 A	0/5/10A	0/5 L	5/10/15L	5 L	5 S	5/10 L	5 S
2018	5 A	10 A	0 L	10 L	5 L	5 L	0 S	5 S
2019	5 A	5/5 A	10 L	5/5/15L	5 S	5 L	10 L	5/5 S
2023	5 A	5 A	10 L	5/5 L	5/5 S	5 L	0/5 S	0/5 L
2025	5/5 A	10/5 L	5/5 A	0/10 L	0/5 S	5 S	5 L	10 L
2026	10 A	5 A	0 L	5/0/15 * L	0/0/5S	0/5 S	0/5 L	0/5 L