# ROHS

Romanian Olympiad Hardness Scale

*Vlad Constantinescu*

# Cuprins


1 Ce este ROHS . . . . . 3
2 Ce am luat de la MOHS și ce e diferit . . . . . 7
3 Cele trei etape pe scară . . . . . 8
4 Poziția în subiect . . . . . 9
5 Ce înseamnă fiecare treaptă . . . . . 10
Tabelele cu toate problemele . . . . . 17

# Ce este ROHS

ROHS este o scară de dificultate de la 0 la 50, în pași de 5, pentru problemele celor trei etape ale Olimpiadei de Matematică din România: etapa locală (OLM), etapa județeană (OJM) și etapa națională (ONM). Ideea vine de la scara MOHS a lui Evan Chen pentru problemele de olimpiadă internaționale. ROHS aplică aceeași idee concursurilor românești și are trei reguli.

1. **O scară absolută.** Nota spune cât de grea este problema, indiferent de clasă. Două probleme la fel de grele au aceeași notă, fie ele de clasa a IX-a sau de a XII-a. Nu se ține cont de faptul că elevii de a IX-a sunt mai mici. O problemă care apare la clasa a IX-a și la clasa a X-a are aceeași dificultate în ambele, mai puțin dacă soluția ei folosește materie care se vede în a X-a și nu în a IX-a (atunci se aplică regula teoriei, de mai jos).
2. **O singură scară pentru toate etapele.** **0** este cea mai ușoară problemă dată vreodată la OLM, iar **50** este o problemă care *nu ar fi trebuit pusă la concurs*, pentru că nu diferențiază pe nimeni. 50 nu înseamnă „cea mai grea problemă": pot fi mai multe probleme de 50, chiar mai mult de patru (exemplu mai jos, la treapta 50). OJM stă între ele, cu suprapuneri.
3. **Nota e o opinie declarată.** Dificultatea înseamnă cât de greu este să găsești soluția, iar nota exprimă părerea autorului, nu o măsurătoare.

**Cum se folosește acest document.** Partea cea mai importantă sunt tabelele de la pagina 17: acolo se caută o problemă după etapă, an, clasă și poziție și se vede nota ei, iar de acolo lucrează elevii. În anexă, nota fiecărei probleme este un link: dacă apeși pe ea, ajungi direct la discuția acelei probleme pe AoPS (Art of Problem Solving), unde găsești enunțul și soluții. Linkurile există pentru OJM și ONM; la OLM nu există discuții pe AoPS. Restul explică ce înseamnă nota și cum a fost dată. În anexă, o problemă cu o steluță folosește materie din clase mai mari.

*Despre nume: ROHS înseamnă Romanian Olympiad Hardness Scale, iar SDOM înseamnă Scara Dificultății Olimpiadelor de Matematică; sunt același nume, în engleză și în română, după modelul MOHS. În acest document folosesc peste tot numele ROHS.*

**De unde vine.** ROHS este inspirat de MOHS. Scara lui Evan Chen m-a ajutat foarte mult să știu la ce să lucrez: să aleg probleme potrivite

nivelului și să văd ce îmi lipsește. ROHS vrea să facă același lucru pentru problemele românești de olimpiadă.

> **Regula de bază.** *Nota unei probleme este egală cu dificultatea celei mai ușoare soluții.* Problema se notează după cel mai simplu drum pe care l-ar găsi un concurent pregătit, nu după soluția oficială, care poate fi mai complicată decât e nevoie. Cea mai simplă soluție se stabilește combinând soluțiile oficiale, soluțiile mele și soluțiile de pe AoPS. „A chain is as weak as its weakest link." (Un lanț e la fel de slab ca veriga lui cea mai slabă.) Regula se aplică *soluțiilor*: dificultatea unei soluții nu poate fi mai mică decât a celui mai greu pas al ei, dar crește și cu numărul de pași. De exemplu, dacă cea mai simplă soluție are 10 pași de câte 5 ROHS, problema nu are 5, ci probabil în jur de 20 ROHS.

## Cum intră teoria în notă: cinci exemple

Scara **nu** presupune că toată materia de olimpiadă este cunoscută. Se ține cont de ce materie folosește cea mai simplă soluție, ca să nu pară grea o problemă care este doar un caz particular al unei teorii mari. **Regula teoriei:** dacă există o soluție ușoară care folosește o teorie grea, nota *scade*, cu atât mai mult cu cât teoria este mai cunoscută și mai simplu de aplicat, iar nota finală este o medie între cazul în care teoria este cunoscută (unde poate ajunge la 0) și cazul în care nu este, ponderată după cât de mulți concurenți o știu. Dacă teoria este puțin cunoscută, nota crește. O idee care trebuie inventată de la zero (de exemplu principiul cutiei) nu este „teorie ușoară". Materia pe care o consider cunoscută de un concurent pregătit este cea din cărțile mele de matematică pentru olimpiadă, disponibile pe Amazon în engleză (https://www.amazon.com/dp/B0HC7W95F6) și în franceză (https://www.amazon.fr/dp/B0HKGB6PJY). (Scara MOHS are un tabel asemănător, cu cunoștințele presupuse.) Cinci exemple, cu notele mele:

> **Exemplul 1 (OJM 2026, clasa a XII-a, P4).** Fie $f : [0,1] \to [0,1]$ o funcție continuă și bijectivă, cu $f(x) < x$ pentru orice $x \in (0,1)$. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ notăm $f_n = f \circ f \circ \cdots \circ f$ ($n$ funcții) și $I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$. a) Demonstrați că pentru orice $x \in (0,1)$ avem $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. b) Determinați $\lim_{n\to\infty} I_n$.

Subpunctul a) are **15**. Subpunctul b) are **10**: pentru cine știe teorema convergenței dominate este **0** (șirul $f_n$ converge punctual la 0 pe $(0,1)$ și $|f_n| \le 1$), iar fără ea are tot în jur de **15**. Pentru că teorema este destul de

cunoscută, nota finală este o medie între cele două cazuri: **10**.

**Exemplul 2 (OJM 2025, clasa a XI-a, P4).** Determinați toate tripletele de matrice $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $A = BC - CB$, $B = CA - AC$, $C = AB - BA$.

Aici se pot face efectiv calcule, iar calculele ies frumos: nota este **15**. Dacă încerci să rezolvi problema cu teorema Cayley-Hamilton, adică fără calcule, ea este semnificativ mai grea; soluția ușoară este cea cu calcul direct, la care trebuie doar curajul de a-l face.

**Exemplul 3 (ONM 2006, clasa a X-a, P4).** Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Să se determine $n$ mulțimi $A_i$, $1 \leq i \leq n$, din plan, disjuncte două câte două, astfel încât: a) pentru orice cerc $\mathcal{C}$ din plan și orice $i$, $A_i \cap \text{Int}(\mathcal{C}) \neq \emptyset$; b) pentru orice dreaptă $d$ din plan și orice $i$, proiecția lui $A_i$ pe $d$ nu coincide cu $d$.

Se iau mulțimi numărabile și dense, de forma $(\mathbb{Q} + a_i) \times \mathbb{Q}$ cu diferențele $a_i - a_j$ iraționale: densitatea dă a), iar proiecția unei mulțimi numărabile nu poate acoperi o dreaptă, ceea ce dă b). Pentru cine știe analiză (numărabil contra nenumărabil) nota este **20**. Cine nu e familiarizat cu conceptul de densitate ar da mai mult, în jur de **40**.

**Exemplul 4 (ONM 2023, clasa a IX-a, P4).** Fie numerele reale $r, s \in [1, \infty)$ cu proprietatea că pentru orice numere naturale nenule $a, b$, cu $a \mid b$, rezultă $[ar] \mid [bs]$. a) Demonstrați că $\frac{s}{r}$ este număr natural. b) Arătați că $r$ și $s$ sunt numere naturale. ($[x]$ este partea întreagă a lui $x$.)

Subpunctul a) are **15**: fără analiză are în jur de **20**, iar cine știe analiza îl rezolvă imediat (**0**). Pentru că puțini elevi de clasa a IX-a cunosc analiza, nota finală este o medie între cele două cazuri. Subpunctul b) are **30**. Nu există o notă a problemei întregi: fiecare subpunct are nota lui. Cea mai simplă soluție a lui b) folosește „analiza de clasa a IX-a”: densitatea părților fracționare $\{nr\}$ (teorema lui Kronecker) când $r$ este irațional, iar cazul rațional se tratează separat.

**Exemplul 5 (ONM 2004, clasa a XII-a, P3).** Fie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ o funcție integrabilă astfel încât $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 xf(x)\,dx = 1$. Să se arate că $\int_0^1 f^2(x)\,dx \geq 4$.

Aici apare „Pitagora pentru integrale” (Teorema 4.44, identitatea-cheie, din cartea mea *Analiză și Algebră pentru Olimpiadă*): dacă $f = g + h$ cu $g, h$ ortogonale, adică $\int gh = 0$, atunci $\int f^2 = \int g^2 + \int h^2 \geq \int g^2$. Se ia

$g = 6x - 2$, care satisface aceleași două condiții ca $f$, iar $h = f - g$ este ortogonală pe 1 și pe $x$; rezultă $\int_0^1 f^2 \geq \int_0^1 (6x-2)^2 dx = 4$. Pentru cine știe teoria, problema are **0**: trebuie doar să știi să o aplici. Pentru cine nu o știe, problema nu este chiar ușoară și are în jur de **20**. Pentru că sunt destul de puțini concurenți care cunosc această inegalitate, nota finală este o medie între cele două cazuri: **15**.

Cele cinci exemple arată cum se citește o notă: ea răspunde la întrebarea „cât de grea este cea mai ușoară soluție", iar o soluție care exploatează o teoremă cunoscută coboară nota (nota finală fiind o medie între cei care o știu și cei care nu).

## Ce nu pretinde nota: numărul de rezolvări

ROHS **nu** face afirmații de felul „la o problemă de 50 ROHS ar trebui să fie 0 rezolvări, la 45 între 1 și 3, la 40 între 3 și 6, la 35 între 6 și 10" și așa mai departe. Motivul: elevii tind să nu se gândească suficient la P4 de la ONM, pentru că îi intimidează. Numărul de rezolvări depinde deci de poziția problemei și de timp, nu doar de dificultatea ei. Cu toate acestea, nota **nu** se calculează din numărul de rezolvări, dar mă uit și la rezultatele oficiale, ca la un semnal orientativ. Cel mai bun semnal e o problemă de pe P1 până la P3, la care s-au gândit mulți, și pe care nu a luat nimeni punctaj maxim (vezi ONM 2013, clasa a XII-a, P2, la treapta 50).

> **Exemplu (ONM 2026, clasa a XI-a, P4).** Fie $M = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ o mulțime de $n \geq 2$ matrice din $\mathcal{M}_{2026}(\mathbb{C})$ astfel încât $AB \in M$, pentru orice $A, B \in M$. Demonstrați că există $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n \in \{-1, 0, 1\}$, nu toate nule, astfel încât $\text{rang}(\varepsilon_1 A_1 + \varepsilon_2 A_2 + \ldots + \varepsilon_n A_n) \leq 1013$.

Eu îi dau **35 ROHS**: este o problemă grea, dar nu foarte grea (treapta „foarte grea" începe la 40). Dar era ultima problemă, la o națională la care, dacă rezolvai trei probleme, erai printre primii patru, așa că oamenii nu prea s-au gândit la ea. Asta e firesc, pentru că P4 sunt aproape mereu cele mai grele probleme din subiect.

## Ce am luat de la MOHS și ce e diferit

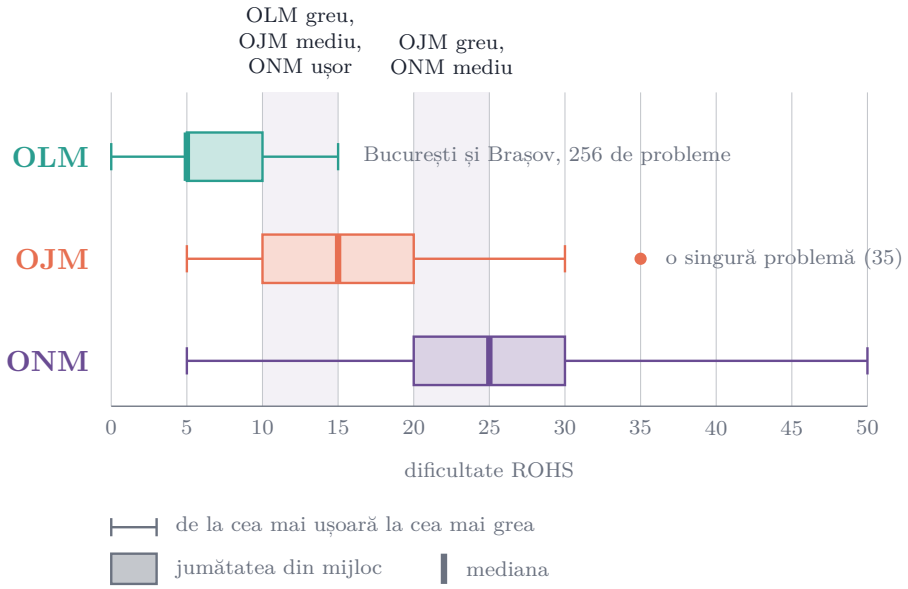
Scara MOHS a lui Evan Chen definește fiecare treaptă prin patru lucruri: un nume (de exemplu „foarte ușoară” sau „brutală”), locul în concurs pe care îl poate ocupa problema (IMO 1/4, 2/5 sau 3/6), cum se descurcă elevii din țările de top și câteva exemple recente. Evan Chen subliniază și că notele sunt opinia lui personală. ROHS păstrează aceste patru elemente și pașii de 5, dar se schimbă trei lucruri.

- **Locul în concurs se măsoară în etape și poziții.** Treptele se descriu prin ce poziție (P1 la P4) ocupă problemele din OJM și din ONM, nu prin IMO.
- **Aceeași cifră nu înseamnă același lucru ca la MOHS.** MOHS are un singur concurs de referință, IMO, iar ROHS pune pe aceeași scară mai multe concursuri: patru clase și trei etape care se suprapun. De aceea o problemă de 10 ROHS este strict mai ușoară decât una de 10 MOHS, iar cele două scări nu se pot compara cifră cu cifră.
- **Nota nu se măsoară în rezolvări.** MOHS dă, pentru fiecare treaptă, un indicator despre cum ar trebui să se descurce concurenții, dar precizează că el trebuie citit în context și că nota și rezultatele nu sunt în relație de cauzalitate. ROHS nu dă un astfel de indicator: nu spune, de exemplu, că la o problemă de 50 ar trebui să fie 0 rezolvări, pentru că numărul de rezolvări depinde și de poziția problemei, și de timpul avut la dispoziție. Mă uit și la rezultate, ca să calibrez notele, dar nota nu se bazează pe ele (vezi „Ce nu pretinde nota”). Descrierile treptelor vorbesc despre idee și despre poziție, nu despre rezolvări.

> **Avertisment de folosire, ca la MOHS.** Notele sunt un punct de reper, nu o interdicție. Uită-te la notă ca să vezi cam pe unde să lucrezi și lucrează mereu probleme puțin peste nivelul tău. Terence Tao spune:
>
> *„The ideal problem to work on is one which is just outside of your reach”*
>
> Terence Tao
>
> Dacă sari peste problemele cu notă mare, nu vei învăța niciodată să le rezolvi, iar dacă lucrezi doar probleme prea ușoare, nu vei progresa.

## Cele trei etape pe scară

Desenul arată unde se află problemele fiecărei etape. Pentru OJM și ONM, desenul se bazează pe 784 de probleme notate, din 196 de subiecte, pentru clasele IX la XII, anii 2001 la 2026. Pentru OLM se bazează pe 256 de probleme de la etapa locală din două orașe: București (96 de probleme, anii 2007, 2008, 2011, 2012, 2020 și 2024) și Brașov (160 de probleme, anii 2010, 2013, 2014, 2016 la 2019, 2023, 2025 și 2026), notate cu aceleași reguli și cu repere luate din OJM și ONM. Linia subțire merge de la cea mai ușoară la cea mai grea problemă, caseta cuprinde jumătatea din mijloc a problemelor, iar bara groasă din casetă este mediana.




**Ce se vede.** La OJM, jumătatea din mijloc a problemelor are dificultate între 10 și 20, mediana este 15, iar cele mai grele probleme au 30, cu o singură excepție de 35. La ONM, jumătatea din mijloc este între 20 și 30, mediana este 25, iar 93 din 100 de probleme au cel mult 30. Cele mai grele probleme ONM urcă până la 50.

Suprapunerea e mare, exact cum bănuia ideea de la care a pornit scara: 18% dintre problemele ONM au dificultate cel mult 15, adică la nivelul medianei OJM, iar 49% dintre problemele OJM au dificultate cel puțin 20, adică aproape la nivelul medianei ONM (25). Pe poziții, asta înseamnă că, de obicei, un P3 sau un P4 de la OJM (medianele 20 și 22,5) sunt la nivelul

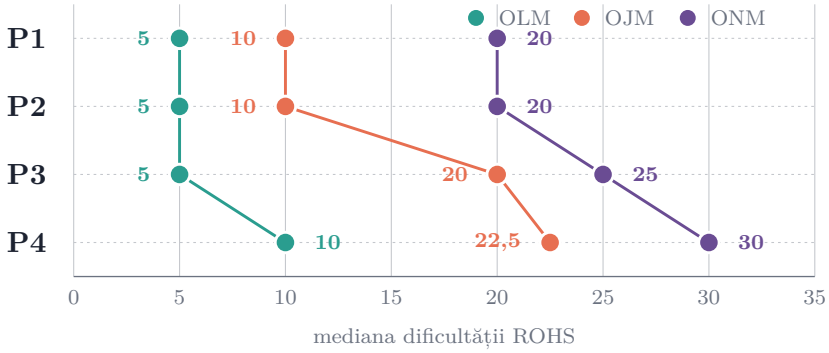
unui P1 sau P2 de la ONM (ambele cu mediana 20), iar un P4 de la OLM (mediana 10) este la nivelul unui P1 sau P2 de la OJM (ambele cu mediana 10). Cele mai ușoare probleme de la națională (55 din 400 au cel mult 10, dintre care 34 sunt P1) sunt la nivelul problemelor de la etapa locală.

**OLM, măsurat pe două orașe.** La OLM, jumătatea din mijloc a problemelor are dificultate între 5 și 10, mediana este 5, iar cea mai grea problemă are 15; 14 probleme (5%) au 0. Ideea de la care a pornit scara se confirmă și aici: cele mai grele probleme de OLM (17 din 256, cu nota 15) sunt la nivelul medianei OJM, iar 47% dintre problemele OJM (cele cu nota cel mult 10) sunt la nivelul celor mai grele de la OLM. Zona 10 la 15 este comună celor trei etape. București și Brașov arată la fel în privința medianei și a plafonului; Brașov are mai multe probleme foarte ușoare (11 din 160 au 0, față de 3 din 96 la București).

**Limita OLM.** Eșantionul este din două orașe, în 16 ani, și nu reprezintă toată țara. Alte județe pot avea probleme și mai ușoare sau mai grele, deci adevăratul 0 și adevăratul plafon pot fi altele. Scara însăși nu a trebuit adaptată: nicio problemă de OLM nu depășește 15, iar cele 14 probleme de 0 fixează capătul de jos la nivelul eșantionului.

## Poziția în subiect

Fiecare subiect are patru probleme. Al doilea desen arată mediana dificultății pe poziție, pentru cele trei etape, iar tabelul de sub el dă și jumătatea din mijloc a problemelor de pe fiecare poziție.




**Mediana pe poziție** (în paranteză, prima și a treia pătrime, adică jumătatea din mijloc a problemelor de pe acea poziție):

| | P1 | P2 | P3 | P4 |
|---|---|---|---|---|
| OLM (București și Brașov) | 5 (5 la 6,25) | 5 (5 la 10) | 5 (5 la 10) | 10 (5 la 10) |
| OLM București | 5 (5 la 10) | 7,5 (5 la 10) | 10 (5 la 10) | 10 (8,75 la 15) |
| OLM Brașov | 5 (5 la 5) | 5 (5 la 10) | 5 (5 la 10) | 7,5 (5 la 10) |
| OJM | 10 (5 la 10) | 10 (10 la 20) | 20 (10 la 25) | 22,5 (20 la 25) |
| ONM | 20 (10 la 20) | 20 (20 la 25) | 25 (20 la 30) | 30 (25 la 30) |

La toate trei etapele dificultatea crește de la P1 la P4, dar P1 și P2 au aproape aceeași mediană. La OLM creșterea e mică (de la 5 la 10), la OJM e mare (de la 10 la 22,5), iar la ONM de la 20 la 30. Pozițiile se suprapun între etape: P4 de la OJM (22,5) stă între P2 (20) și P3 (25) de la ONM, iar P3 de la OJM (20) este la nivelul lui P1 și P2 de la ONM.

## Ce înseamnă fiecare treaptă

Denumirile treptelor sunt cele date de mine:

| Nota | Ce înseamnă | Nota | Ce înseamnă |
|---|---|---|---|
| 0 | sub nivel de olimpiadă | 30 | medie spre grea |
| 5 | trivial | 35 | grea |
| 10 | foarte ușoară | 40 | foarte grea |
| 15 | ușoară | 45 | extrem de grea |
| 20 | medie ușoară | 50 | nu ar trebui folosită la concurs |
| 25 | medie | | |

Fiecare treaptă are mai jos o caracteristică, locul pe care îl ocupă de obicei în subiect, numărul de probleme care îi corespund și două exemple, cu enunțul lor. Descrierile vorbesc despre idee și poziție, nu despre cât de mulți elevi au rezolvat problema, pentru că numărul de rezolvări depinde și de poziția problemei și de timp.

## 0 Treapta 0: sub nivel de olimpiadă

Exercițiu de manual, dintr-un singur pas standard, rezolvat în câteva minute. Apare doar la OLM (14 probleme). Exemple:

- **OLM 2020, clasa a IX-a, P2**. Fie numerele reale $a$ și $b$ cu proprietatea $[|a+b|]<4$. Arătați că $[ab]<4$. (Pentru $a$ real se notează $[a]$ partea întreagă a lui $a$ și $|a|$ modulul lui $a$).
- **OLM Brașov 2016, clasa a IX-a, P1**. Arătați că numărul $a=2n^2+\left[\sqrt{4n^2+n}\right]+1$, unde $n\in\mathbb{N}^*$, poate fi scris ca suma a două pătrate perfecte. ($[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real $x$)

## 5 Treapta 5: trivială

Un singur pas standard sau o idee cunoscută, aplicată direct, fără capcane. Tipul obișnuit de P1 foarte ușor la OJM; la ONM apare rar. 46 de probleme la OJM și ONM (33 de P1) și 128 la OLM. Exemple:

- **ONM 2003, clasa a IX-a, P1**. Să se determine numerele naturale nenule $a$ și $b$ cu proprietatea că oricare ar fi $x,y\in[a,b]$ avem $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\in[a,b]$.
- **OJM 2003, clasa a IX-a, P1**. Determinați funcțiile $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ cu proprietatea că, pentru orice $n\geq 1$, $f(1)+f(2)+\cdots+f(n)$ este un cub perfect cel mult egal cu $n^3$.

## 10 Treapta 10: foarte ușoară

O idee cunoscută aplicată cu puțină atenție: doi pași scurți sau o reformulare urmată de un calcul. P1 și P2 la OJM, un P1 ușor la ONM. 188 de probleme la OJM și ONM, 97 la OLM. Exemple:

- **ONM 2002, clasa a IX-a, P2**. Fie $ABC$ un triunghi dreptunghic în $A$ și $M\in(AB)$ astfel încât $\frac{AM}{MB}=3\sqrt{3}-4$. Să se determine măsura unghiului $B$ știind că simetricul lui $M$ față de mijlocul segmentului $[GI]$ aparține dreptei $AC$. ($G$ este centrul de greutate al triunghiului, iar $I$ centrul cercului înscris).
- **ONM 2004, clasa a X-a, P1**. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ astfel ca $|f(x)-f(y)|\leq|x-y|$, pentru orice $x,y$ reali. Să se arate că dacă pentru orice $x$ real șirul $x, f(x), f(f(x)),\ldots$ este progresie aritmetică, atunci există $a$ real astfel încât $f(x)=x+a$, pentru orice $x$ real.

## 15 Treapta 15: ușoară

Un pas care nu se vede din prima. Aici se întâlnesc etapele: un P3 la OJM și un P1 sau P2 la ONM. 31 de probleme la OJM și ONM, 17 la OLM. Exemple:

- **OLM 2024, clasa a X-a, P4**. Se consideră numerele complexe $a, b, c, d$ astfel încât $|a| = |b| = |c| = |d| = 1$, $|a+b+c+d| = \sqrt{2}$ și $a^2+b^2+c^2+d^2 = 0$. Să se arate că $|a^3 + b^3 + c^3 + d^3| = 2\sqrt{2}$.
- **ONM 2001, clasa a IX-a, P1**. Fie $A$ o mulțime de numere reale care verifică: a) $1 \in A$; b) $x \in A \Rightarrow x^2 \in A$; c) $x^2 - 4x + 4 \in A \Rightarrow x \in A$. Să se arate că $2000 + \sqrt{2001} \in A$.

## 20 Treapta 20: medie ușoară

Două idei independente sau o idee mai puțin cunoscută. Un P4 la OJM, un P2 sau P3 la ONM. 217 probleme (102 la OJM, 115 la ONM), cea mai numeroasă treaptă. Exemple:

- **ONM 2001, clasa a XI-a, P2**. Se consideră o matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$, de rang $r$, unde $n \geq 2$ și $1 \leq r \leq n-1$. a) Să se arate că există $B \in M_{n,r}(\mathbb{C})$, $C \in M_{r,n}(\mathbb{C})$, cu rang $B$ = rang $C = r$, astfel încât $A = BC$; b) Arătați că matricea $A$ verifică o ecuație polinomială de grad $r + 1$, cu coeficienți complecși.
- **ONM 2005, clasa a IX-a, P2**. Să se determine funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pentru care
$$x(f(x + 1) - f(x)) = f(x),$$
oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ și
$$|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|,$$
oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

## 25 Treapta 25: medie

O idee neevidentă sau una cunoscută, dar deghizată. Un P3 sau P4 obișnuit la ONM, o problemă grea la OJM. 151 de probleme (69 la OJM, 82 la ONM). Exemple:

- **ONM 2002, clasa a XII-a, P2**. Fie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ integrabilă, astfel încât
$$0 < \left| \int_0^1 f(x)\, dx \right| \leq 1.$$

Să se demonstreze că există $x_1 \neq x_2$, $x_1, x_2 \in [0,1]$, astfel încât

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = (x_1 - x_2)^{2002}.$$

- **ONM 2003, clasa a IX-a, P2**. Un număr natural $n$, $n \geq 2$, se numește „prietenos” dacă există o familie de submulțimi nevide $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ale mulțimii $\{1, 2, \ldots, n\}$ astfel încât: 1) $i \notin A_i$ pentru orice $i = \overline{1,n}$; 2) $i \in A_j$ dacă și numai dacă $j \notin A_i$ pentru orice $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, distincte; 3) $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ pentru orice $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Să se arate că: a) numărul 7 este prietenos; b) $n$ este prietenos dacă și numai dacă $n \geq 7$.

## 30 Treapta 30: medie spre grea

O idee neevidentă, peste un P3 obișnuit de la ONM și sub un P4 foarte dificil. Mai ales P4 la ONM; la OJM sunt doar 18 probleme, aproape toate P4 sau P3. În total 121 de probleme (18 la OJM, 103 la ONM). Exemple:

- **ONM 2012, clasa a X-a, P2**. Se consideră trei numere complexe $a$, $b$ și $c$, astfel încât $a + b + c = 0$ și $|a| = |b| = |c| = 1$. Demonstrați că

$$3 \leq |z - a| + |z - b| + |z - c| \leq 4,$$

  oricare ar fi numărul complex $z$, cu $|z| \leq 1$.

- **ONM 2002, clasa a X-a, P3**. Să se determine numerele reale $a, b, c, d, e$ din intervalul $[-2, 2]$, pentru care:

$$a + b + c + d + e = 0$$

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3 = 0$$

$$a^5 + b^5 + c^5 + d^5 + e^5 = 10$$

## 35 Treapta 35: grea

O idee dificilă, în general la ultima problemă a subiectului. 23 de probleme (una la OJM, 22 la ONM; 16 sunt P4). Exemple:

- **ONM 2025, clasa a XII-a, P4**. Fie $p$ un număr prim, $p \geq 3$, iar $k$ un număr impar nedivizibil cu $p$. Fie $K$ un corp finit cu $kp+1$ elemente și $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_t\}$, mulțimea elementelor din $K^* = K \setminus \{0\}$ care nu au ordinul $k$ în grupul multiplicativ $(K^*, \cdot)$. Arătați că polinomul $P(X) = (X + x_1)(X + x_2)\ldots(X + x_t)$ are cel puțin $p$ coeficienți egali cu 1.

- **ONM 2005, clasa a XII-a, P4**. Fie $A$ un inel cu $2^n + 1$ elemente, unde $n$ este un număr natural nenul și $M = \{k \mid k \in \mathbb{N},\ k \geqslant 2,\ x^k = x,\ \text{pentru orice } x \in A\}$. Demonstrați că următoarele afirmații sunt echivalente: (a) $A$ este corp; (b) $M$ este nevidă și cel mai mic element al său este egal cu $2^n + 1$.

## 40 Treapta 40: foarte grea

Doar P4 de la ONM (5 probleme), prea grea pentru un P2 sau P3 obișnuit. Exemple:

- **ONM 2019, clasa a XI-a, P4**. Fie $p$ un număr prim. Pentru orice permutare $\sigma \in S_p$, considerăm matricea $A_\sigma = (a_{ij})_{i,j=1}^{p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{Z})$, cu elementele $a_{ij} = \sigma^{i-1}(j)$, unde $\sigma^0$ este permutarea identică, iar $\sigma^k = \sigma \circ \sigma \circ \cdots \circ \sigma$, de $k$ ori. Arătați că mulțimea
$$D = \{|\det(A_\sigma)| : \sigma \in S_p\}$$
are cel mult $1 + (p-2)!$ elemente.
- **ONM 2013, clasa a X-a, P4**. a) Să se arate că
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^m} < m,$$
pentru orice $m \in \mathbb{N}^*$. b) Fie $p_1, p_2, \ldots, p_n$ numerele prime mai mici decât $2^{100}$. Să se arate că
$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_n} < 10.$$

## 45 Treapta 45: extrem de grea

Peste un P4 foarte dificil. În date este una singură:

- **ONM 2015, clasa a XII-a, P4**. Determinați funcțiile polinomiale neconstante $f : [0,1] \to \mathbb{R}^*$, cu coeficienți raționali, care au următoarea proprietate: oricare ar fi $x$ în intervalul $[0,1]$, există două funcții polinomiale $g_x, h_x : [0,1] \to \mathbb{R}$, cu coeficienți raționali, astfel încât $h_x(x) \neq 0$ și
$$\int_0^x \frac{1}{f(t)}\,\mathrm{d}t = \frac{g_x(x)}{h_x(x)}.$$

## 50 Treapta 50: nu ar trebui folosită la concurs

Nota 50 nu înseamnă „cea mai grea problemă”, ci o problemă care **nu ar fi trebuit pusă la concurs**, pentru că nu diferențiază pe nimeni: cine o rezolvă o face mai degrabă din noroc la corectură. Pot fi mai multe probleme de 50. În date este una singură, cu a) 50 și b) 30. La ea, din 54 de concurenți nimeni nu a luat mai mult de 4 puncte din 7, deși, fiind P2, s-au gândit mulți la ea:

- **ONM 2013, clasa a XII-a, P2**. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel care îndeplinește simultan următoarele două condiții: (1) $A$ nu este corp, (2) oricare ar fi $x$ un element neinversabil al lui $A$, există un număr întreg $m \geq 1$, care depinde de $x$, astfel încât

$$x = x^2 + x^3 + \cdots + x^{2^m}.$$

  Să se arate că: (a) $x + x = 0$, oricare ar fi $x \in A$, (b) $x^2 = x$, oricare ar fi elementul neinversabil $x \in A$.

**Distribuția notelor de acum pe etape (număr de probleme).**

| Etapa | 0 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 | 50 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| OJM | 0 | 41 | 138 | 15 | 102 | 69 | 18 | 1 | 0 | 0 | 0 | 384 |
| ONM | 0 | 5 | 50 | 16 | 115 | 82 | 103 | 22 | 5 | 1 | 1 | 400 |
| OLM | 3 | 41 | 42 | 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 96 |
| OLM Brașov | 11 | 87 | 55 | 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 160 |

# Tabelele cu toate problemele

Tabelele de mai jos cuprind toate cele 1040 de probleme notate: 784 de la OJM și ONM, câte un tabel pe clasă, și 256 de la OLM (96 din București și 160 din Brașov), în două tabele separate la final. Fiecare celulă arată nota ROHS (0 la 50), litera temei, **o steluță** dacă cea mai simplă soluție folosește materie din clase mai mari (de exemplu o problemă de a X-a rezolvată simplu cu derivate). Culoarea este cu atât mai intensă cu cât problema e mai grea. Dacă o problemă are note separate pe subpuncte, ele apar în ordinea a, b, c, iar culoarea urmează cea mai mare.

**Teme:** A algebră, G geometrie, C combinatorică, T teoria numerelor, L analiză, S structuri algebrice (grupuri, inele, corpuri, matrice). **Goluri:** 2000 (fără sursă), 2020 (concurs neținut), OJM 2021 (ONGM, alt format). La OLM sunt acoperiți anii cu subiecte de liceu publicate: București (2007, 2008, 2011, 2012, 2020, 2024) și Brașov (2010, 2013, 2014, 2016 la 2019, 2023, 2025, 2026); 2009, 2015, 2021 și 2022 lipsesc.

ușoară **0** **5** **10** **15** **20** **25** **30** **35** **40** **45** **50** grea

celulă cu note pe subpuncte: **5/15*** A steluță: materie din clase mai mari la OJM și ONM, nota este un link către discuția problemei pe AoPS (la OLM nu există discuții pe AoPS)

celulă goală: · problemă nenotată

## Clasa a IX-a

| An | OJM | | | | ONM | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | P1 | P2 | P3 | P4 | P1 | P2 | P3 | P4 |
| 2001 | 5/10 A | 5* G | 15 A | 20/5/5* A | 15 A | 15 G | 25 G | 20 T |
| 2002 | 10 A | 10/5 G | 5/20 G | 5/20 A | 5 A | 10 G | 15 T | 20 A |
| 2003 | 5 A | 10 T | 10 G | 10/25 C | 5 A | 20/25 C | 25 G | 30 G |
| 2004 | 5 A | 5* G | 10/10 T | 20 C | 15 T | 20 A | 30 G | 5/10/30C |
| 2005 | 0/5 A | 10 G | 10/10 G | 20/5 C | 20 G | 20 A | 20 T | 30 A |
| 2006 | 20 A | 25 C | 20 G | 20 T | 10 A | 20 G | 10/20 G | 25 C |
| 2007 | 5/10/5A | 10/5 G | 10 T | 20/5 G | 20 A | 25 G | 20 C | 5/30 C |
| 2008 | 10 A | 10 C | 10 T | 25 G | 20 A | 10/10 A | 20 A | 25 G |
| 2009 | 5 G | 20 C | 10/5 A | 20 A | 20 G | 5 A | 25 A | 25 C |
| 2010 | 5/10/10G | 10 A | 25 A | 20 A | 10/20 G | 10 G | 5/20 A | 35 A |
| 2011 | 5 G | 10 C | 10 A | 20 A | 20 A | 25 T | 30 G | 25 T |
| 2012 | 5 A | 10 A | 10/5 G | 25 T | 20 G | 25 L | 25 A | 30 C |
| 2013 | 0/5 A | 10/10 G | 20 A | 10 C | 10 T | 30 A | 20/30 G | 25 T |
| 2014 | 5 A | 20 G | 25 G | 20 T | 20 T | 5/30 T | 10 G | 20 G |
| 2015 | 10 G | 10 A | 10 T | 25 T | 25 T | 25 A | 35 G | 35 A |
| 2016 | 5 G | 20 T | 25 A | 10 T | 20 G | 30 A | 20/5 T | 25 A |
| 2017 | 10 G | 25 G | 5/10 T | 25 A | 20 G | 10 G | 10/25 T | 10/25/30A |
| 2018 | 10 A | 10 G | 10 G | 20 L | 30 G | 25 A | 35 A | 35 C |
| 2019 | 5/0 A | 10 G | 5/20 A | 20 T | 20 G | 30 G | 25 T | 30 A |
| 2021 | *ONGM, exclus* | | | | 10 G | 30 G | 25 A | 20 A |
| 2022 | 10/5 A | 5/20 A | 5/10 T | 5/30 G | 20 T | 20 G | 25 A | 30 A |
| 2023 | 0/10 G | 5/5 A | 5/25 A | 20 T | 0/20 A | 25 A | 30 C | 15/30 T |
| 2024 | 5 G | 5/10 A | 20 T | 25/10 G | 10/20 G | 20 T | 30 A | 30 A |
| 2025 | 10 G | 10 A | 20 A | 20 C | 10 C | 30 G | 10/30 A | 25/35 L |
| 2026 | 5/20 A | 10 G | 10 T | 25 T | 20 A | 30 A | 35 T | 40 G |

## Clasa a X-a

| An | OJM | | | | ONM | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | P1 | P2 | P3 | P4 | P1 | P2 | P3 | P4 |
| 2001 | 15 A | 10 A | 15 G | 25 A | 15 A | 20 G | 20 C | 30 A |
| 2002 | 15 A | 15 A | 20 A | 5/20 C | 20 G | 15 A | 30 A | 30 L |
| 2003 | 10 C | 10/20* A | 15/10 G | 25 A | 10 G | 15 A | 25 G | 20/30 A |
| 2004 | 5 C | 10 T | 10 G | 25 A | 10 L | 20 G | 25 A | 20/15 C |
| 2005 | 10 A | 10 A | 30 G | 20 C | 25 A | 30 G | 10/20 T | 10/15 T |
| 2006 | 10 A | 10 G | 20/10 C | 20/25 A | 5 C | 20 L | 20 T | 20 L |
| 2007 | 10 A | 0/5 C | 20 G | 25 A | 10 A | 5 A | 10 T | 5/30 C |
| 2008 | 10 A | 10 A | 5/5 A | 20 A | 20 G | 20 A | 25 C | 35 T |
| 2009 | 5/0 A | 10 A | 5/20 A | 5/20 A | 5/20 A | 20 A | 30 A | 35 C |
| 2010 | 5/5 A | 10 A | 20 A | 10/20 A | 10 A | 20 A | 10/20 C | 30 G |
| 2011 | 10 A | 10/20 A | 25 A | 10/20 A | 20/10 A | 20 A | 20 L | 5/30 T |
| 2012 | 10/25 L | 10/20 A | 5/15 A | 25 A | 25 A | 30 G | 20/5 A | 20 C |
| 2013 | 10/5 A | 10 A | 10 L | 20 A | 10 A | 25 A | 15 A | 40 T |
| 2014 | 10 A | 10 A | 20 A | 30 A | 20 T | 30 T | 20 C | 30 A |
| 2015 | 20 A | 10 A | 25 A | 20 A | 10 A | 10/20 C | 15 A | 30 C |
| 2016 | 5 A | 25 A | 5/10 A | 5/10 A | 20 L | 5/30 L | 5/25 G | 25 C |
| 2017 | 5/10 T | 20 A | 5 A | 5/5 A | 10 A | 20/20 A | 10 A | 25 C |
| 2018 | 5 A | 10 A | 25 A | 10 A | 10 L | 25 G | 15 A | 30 A |
| 2019 | 10 A | 10/20 A | 10 G | 30 A | 10 A | 25 C | 35 A | 30 C |
| 2021 | *ONGM, exclus* | | | | 20 A | 10 A | 20 C | 30 A |
| 2022 | 10 A | 20 G | 10 A | 25 A | 10 A | 20 A | 25 A | 20 C |
| 2023 | 10 A | 5/10 G | 25 A | 25 A | 20* L | 30 L | 30/30 G | 35 C |
| 2024 | 10 A | 10/20 G | 10 A | 20 A | 20* A | 25 G | 10/25 C | 20/30 S |
| 2025 | 10 A | 10 A | 20 A | 10/30 G | 10/25 G | 30 C | 25 A | 35 A |
| 2026 | 5/5 A | 10 A | 10 A | 30 A | 30 A | 25 A | 30 A | 30 C |

## Clasa a XI-a

| An | OJM | | | | ONM | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | P1 | P2 | P3 | P4 | P1 | P2 | P3 | P4 |
| 2001 | 10 A | 5/20 A | 25 L | 5/30 L | 10 L | 5/20 A | 5/20 L | 25/5 L |
| 2002 | 5/15 L | 0/20 G | 5/20 A | 25 L | 10/10/5G | 5/10 L | 5/20 A | 20 L |
| 2003 | 15 A | 10/20 L | 5/10 A | 10/25/30L | 20 G | 30 A | 20 L | 10/25 A |
| 2004 | 5/10 L | 5/20 A | 5/20 L | 5/10/25A | 10 G | 10/20 A | 15/10 L | 20/10/30L |
| 2005 | 5/20 A | 25 L | 10/25 A | 20/20 L | 10/25 A | 10/20 L | 30 A | 5/30 L |
| 2006 | 10 A | 10/20 A | 10/5 L | 10/10 L | 20 A | 10/20 A | 25 G | 20/30 L |
| 2007 | 10 L | 5/10 A | 10/20 L | 20 A | 25 A | 20 L | 25 A | 30 L |
| 2008 | 10 A | 20 A | 5/20 L | 30 L | 20 L | 35 A | 15 L | 25 A |
| 2009 | 10 A | 5 A | 30 L | 5/35 L | 5/10 L | 20 L | 30/10 A | 25 L |
| 2010 | 5 L | 10 A | 20 L | 25 L | 10 A | 10 A | 20 L | 25 L |
| 2011 | 5/10 L | 0/10 A | 25 A | 20 L | 30 A | 25 L | 20 L | 20/5 A |
| 2012 | 10 L | 5/25 A | 5/10 A | 5/25 L | 10/20 L | 20 A | 25 A | 30 L |
| 2013 | 10 L | 10/10 A | 30/20 A | 0/10 L | 20 A | 25 A | 30 L | 10/30 L |
| 2014 | 5/10 A | 5/10 L | 5/5 A | 20/25 L | 25 L | 20 L | 25/10 A | 40 A |
| 2015 | 5/5 L | 10/20 A | 25 A | 25 L | 10 L | 25* A | 30 L | 20 A |
| 2016 | 10 A | 25 A | 20 L | 30/20 L | 10 A | 10/20 A | 10 L | 30 L |
| 2017 | 10/20 L | 10/10 L | 20/5 A | 10 A | 30 L | 25 A | 25 A | 20 L |
| 2018 | 20 A | 20/30 A | 25 L | 20 L | 30 A | 30 L | 25 L | 25 A |
| 2019 | 10 L | 20 A | 30 A | 10/20 L | 20 A | 10 L | 10/25 L | 40 A |
| 2021 | *ONGM, exclus* | | | | 10 L | 20 A | 25 L | 30 A |
| 2022 | 10 L | 20 A | 10/10 L | 25 A | 5/20 L | 20/25 A | 30 L | 20 A |
| 2023 | 10 L | 10/5 A | 25 L | 25/5 A | 25 L | 20 A | 30/20 A | 40 L |
| 2024 | 10 A | 20 L | 5/20 A | 10/30 L | 30 L | 5/25 A | 10 A | 25/30 L |
| 2025 | 5 L | 10/5 A | 20/10 L | 15 A | 30 L | 20 A | 30 L | 30/30 A |
| 2026 | 5 A | 10/25 L | 20 A | 25 L | 20/20 L | 20 A | 30/10 L | 35 A |

## Clasa a XII-a

| An | OJM | | | | ONM | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | P1 | P2 | P3 | P4 | P1 | P2 | P3 | P4 |
| 2001 | 5/15 S | 20 S | 10 L | 0/15 L | 0/20 A | 15 S | 15/30 L | 30/25 L |
| 2002 | 5/15 S | 5/10 S | 10/25 L | 5/25 L | 0/15 S | 25 L | 25 L | 10/30 S |
| 2003 | 5/5/10 S | 10/15 L | 5/25 S | 5 L | 5/10 S | 20 L | 5/20 L | 10/5/30 S |
| 2004 | 5/20 A | 20 L | 5/0/25 S | 10/20 L | 20 L | 0/20 S | 15 L | 10/20/5 S |
| 2005 | 20 C | 10/5 L | 10 S | 10/25 S | 10 S | 5/20 S | 20 L | 35 S |
| 2006 | 5 L | 10 S | 25 S | 10 L | 10 S | 20 L | 25 S | 30 L |
| 2007 | 5/5 S | 10 L | 10 L | 10/25 S | 10 L | 5/10 L | 20 S | 10 S |
| 2008 | 20 L | 5/10 L | 25 S | 5/30 S | 25 L | 20 L | 10/25 S | 30/30 S |
| 2009 | 0/10 L | 10 S | 25/10 L | 20 S | 10 L | 5/25 S | 25 S | 35 L |
| 2010 | 10 S | 10/20 S | 25 L | 10/20 L | 10 L | 25/10 S | 30 S | 10/20 L |
| 2011 | 5 L | 0/10 S | 5/10 L | 10/25 S | 20 S | 10 L | 25 S | 30 L |
| 2012 | 10 L | 20 S | 10 S | 20 L | 10 L | 20/10 S | 5/30 L | 30 A |
| 2013 | 5 L | 10/10/20 S | 5/10 L | 20/25 S | 20 L | 50/30 S | 25 L | 30 S |
| 2014 | 5 L | 25 L | 5/20 S | 30 S | 10/25 S | 25 L | 10/30 L | 30/35 S |
| 2015 | 0/10 S | 0/10 L | 10 L | 25 S | 10/25 S | 25 S | 35 L | 45 A |
| 2016 | 5/10 S | 10/5 L | 25 S | 5 L | 5/20 L | 20/30 S | 20 L | 25 S |
| 2017 | 10 L | 20 S | 20 L | 20/30 S | 5/10 L | 20/30 A | 30 S | 10/30 L |
| 2018 | 5/5 L | 20 S | 10 L | 25 S | 25 S | 10 L | 5/25 L | 30 S |
| 2019 | 5/5 S | 20 L | 10 S | 25 L | 30 L | 30 S | 5/35 L | 25/35 A |
| 2021 | *ONGM, exclus* | | | | 10 L | 20 S | 20 T | 30 L |
| 2022 | 0/5/5 S | 10 S | 25 L | 20 L | 25/5 L | 30 S | 5/20 L | 30 S |
| 2023 | 20 L | 25 S | 5/10 L | 25/20 S | 10/30 S | 5/30 S | 30 L | 35 L |
| 2024 | 10 S | 0/5/10 L | 5/20 S | 25 L | 20 L | 25 S | 10 L | 10/30 S |
| 2025 | 5/5 S | 10/25 S | 5/20 L | 5/20 L | 20/5 S | 10 L | 20/30 L | 35 S |
| 2026 | 5/25 L | 0/20 S | 20/10/10 S | 15/10 L | 10 L | 30/10 S | 20 S | 30 L |

## OLM București (etapa locală, toate clasele)

| An | a IX-a | | | | a X-a | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | P1 | P2 | P3 | P4 | P1 | P2 | P3 | P4 |
| 2007 | 5/5 A | 5/0/5 G | 5/10 C | 15 T | 0/10 A | 0/5 A | 10/15 G | 10/15 C |
| 2008 | 5/5 A | 5/5 A | 5 A | 5 G | 10 A | 5/10 A | 5/5 A | 5/5/0 C |
| 2011 | 5 T | 10 A | 5/10 G | 10 C | 5 G | 10 A | 0/10 A | 10 A |
| 2012 | 0/5 T | 10 L | 5/10 G | 5 A | 5 A | 10 A | 10 A | 10/15 A |
| 2020 | 5 T | 0 A | 5 T | 5 G | 5 A | 5 A | 10 L | 10 L |
| 2024 | 0/5 A | 5 A | 0/5 G | 10 A | 5/10 A | 5 A | 5 T | 15 A |

| An | a XI-a | | | | a XII-a | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | P1 | P2 | P3 | P4 | P1 | P2 | P3 | P4 |
| 2007 | 5/10 A | 5/10 A | 10/10 L | 5/10/15 L | 5/0 L | 0/5/5 L | 5/10 S | 5/15 S |
| 2008 | 5 A | 5 L | 5/5 L | 5/10 L | 0/5 S | 0/5/10 S | 0 L | 10 L |
| 2011 | 0/5/10 L | 5/10/5 L | 5 A | 5/5/0 A | 5 L | 15 L | 10 S | 0/5/5 S |
| 2012 | 5/0 L | 5/10 A | 0/10 L | 15 A | 5/10 L | 0/5 S | 5/10 S | 5/15 L |
| 2020 | 5/10 A | 5 A | 10 L | 5/10 L | 0 L | 5 L | 5/10 S | 5/5 S |
| 2024 | 5 A | 0/10 A | 5/5 L | 10/5 L | 5 L | 5/10 S | 0/10 L | 10 S |

## OLM Brașov (etapa locală, toate clasele)

| An | a IX-a | | | | a X-a | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | P1 | P2 | P3 | P4 | P1 | P2 | P3 | P4 |
| 2010 | 10/5 A | 10 G | 0/5/10A | 0/5 A | 5/10 A | 5/5/5A | 5 A | 10 T |
| 2013 | 0/10 A | 5 A | 10 G | 0 G | 5 A | 10 A | 10 A | 15 A |
| 2014 | 10 T | 5/10 A | 5 A | 0 A | 0 A | 5 A | 5 A | 10 L |
| 2016 | 0 T | 5 G | 10 A | 10 T | 5 A | 10 A | 10/5 A | 5 A |
| 2017 | 0/5 A | 5/5 A | 5/5 T | 0/10 G | 0/5 A | 5 G | 0/5 A | 5/10 A |
| 2018 | 0/0 A | 10 A | 5 A | 10 G | 5 A | 5/0/5A | 5 A | 10 A |
| 2019 | 5 A | 0/10 G | 0/5 A | 0/5 A | 5 A | 10 A | 10 A | 5 A |
| 2023 | 5 T | 10 G | 5 A | 5/10 A | 0/5 A | 5 A | 0/5 A | 0/5/10L |
| 2025 | 0/5 A | 0 A | 5 G | 5 G | 5 A | 10 A | 10 A | 5 A |
| 2026 | 10 T | 0/5 A | 0 A | 0 G | 5/0 A | 5 A | 5 C | 5/10 A |

| An | a XI-a | | | | a XII-a | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | P1 | P2 | P3 | P4 | P1 | P2 | P3 | P4 |
| 2010 | 10 A | 15 L | 0/5 S | 10 S | 10 S | 15/5 S | 10 L | 5 L |
| 2013 | 10 C | 5 S | 5/5/10L | 5/5 L | 5 L | 5 L | 5/5 S | 0/5 S |
| 2014 | 5 S | 10 A | 5/10 L | 10 L | 5 S | 10 L | 5/10 L | 5 S |
| 2016 | 5/5 A | 10 A | 5/10 L | 0/5 S | 0/5 L | 5 S | 5/0 S | 15 L |
| 2017 | 5/5 A | 0/5/10A | 0/5 L | 5/10/15L | 5 L | 5 S | 5/10 L | 5 S |
| 2018 | 5 A | 10 A | 0 L | 10 L | 5 L | 5 L | 0 S | 5 S |
| 2019 | 5 A | 5/5 A | 10 L | 5/5/15L | 5 S | 5 L | 10 L | 5/5 S |
| 2023 | 5 A | 5 A | 10 L | 5/5 L | 5/5 S | 5 L | 0/5 S | 0/5 L |
| 2025 | 5/5 A | 10/5 L | 5/5 A | 0/10 L | 0/5 S | 5 S | 5 L | 10 L |
| 2026 | 10 A | 5 A | 0 L | 5/0/15* L | 0/0/5S | 0/5 S | 0/5 L | 0/5 L |